Prof. Dr. Sabine Klapp
M. Sc. Alexander Kraft

1. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Kolloidsysteme

Abgabe: Di. 21.10.2014 in der Vorlesung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es die Punkte. Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 1 (6 Punkte): *Ideales Gas*

Betrachten Sie das klassische ideale, d.h. wechselwirkungsfreie Gas, bestehend aus N Atomen (hier: Massenpunkte) im Volumen V. Da die genaue Gestalt des „Gefäßes" beim idealen Gas keine Rolle spielt, kann das endliche Volumen z.B. durch einen Kubus der Kantenlänge L realisiert werden.

(i) Formulieren Sie den Hamiltonian.
Hinweis: Die Zwangsbedingung des endlichen Volumens kann durch ein geeignetes Potential $V(\mathbf{r})$ realisiert werden.

(ii) Berechnen Sie das Phasenvolumen $\Gamma_N(E,V) = \frac{1}{h^{3N}N!} \iint\limits_{H<E} d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N$.

(iii) Berechnen Sie die Entropie $S(E,V,N)$. Verwenden Sie dabei die Stirling-Formel, um den auftretenden Logarithmus-Term zu vereinfachen.

(iv) Leiten Sie einen exakten thermodynamischen Ausdruck für die innere Energie des idealen Gases (auch „kalorische Zustandsgleichung" genannt) her.

(v) Berechnen Sie den Druck $P(T,V,N)$ und leiten Sie damit die dazugehörige thermische Zustandsgleichung des idealen Gases her.

Aufgabe 2 (10 Punkte): *Gibbs-Bolgoliubov-Ungleichung*

Gegeben sei der Hamiltonian $\mathcal{H}$ eines klassischen Fluidsystems. Im kanonischen Ensemble ist die Freie Energie für dieses System definiert durch

$$\mathcal{F} = -k_B T \ln Z$$

mit der kanonischen Zustandssumme

$$Z = \iint d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N \exp(-\beta\mathcal{H}) \;, \quad \beta = 1/(k_B T).$$

Sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V$, wobei V das Potential einer *Störung* beschreibt und $\mathcal{H}_0$ der Hamiltonian des *ungestörten* Systems ist. Die wichtige Gibbs-Bolgoliubov-Ungleichung lautet nun

$$\mathcal{F} \le \mathcal{F}_0 + \langle V \rangle_0. \tag{1}$$

Die Freie Energie ist also stets kleiner oder gleich der Summe $\mathcal{F}_0 + \langle V \rangle_0$, wobei $\mathcal{F}_0$ die Freie Energie des ungestörten Systems ist und $\langle V \rangle_0$ ist der kanonische Mittelwert von V in Bezug zum Hamiltonian $\mathcal{H}_0$.

Beweisen Sie die Gültigkeit der Ungleichung (1), indem Sie folgende Schritte abarbeiten:

(i) Betrachten Sie den Hamiltonian $\mathcal{H}(\lambda) = \mathcal{H}_0 + \lambda V$, wobei $\lambda = [0 \ldots 1]$ ein kontinuierlicher Störparameter ist. Damit lassen sich Zustandssumme $Z = Z(\lambda)$ und Freie Energie $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\lambda)$ als Funktionen des Parameters λ ausdrücken.

(ii) Bilden Sie die Taylorreihe der Freien Energie in Potenzen von $(\lambda_1 - \lambda_0)$, wobei $\lambda_1 = 1$ die eingeschaltete Störung beschreibt und $\lambda_0 = 0$ entsprechend das ungestörte System.

(iii) Zeigen Sie, dass der in der Reihe auftretende Term linear in $(\lambda_1 - \lambda_0)$ sich schreiben lässt als

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\lambda)}{\partial \lambda} = \langle V \rangle_0$$

(iv) Im letzten Schritt zeigen Sie, dass in der Reihe auftretende Term proportional zu $(\lambda_1 - \lambda_0)^2$ stets negativ ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte): *Funktionalableitung*
Leiten Sie die Euler-Lagrange Gleichung für das folgende Potential her

$$F = \int_a^b dx \left[\frac{c}{2}(\partial_x \psi)^2 + \frac{a\tau^2}{2}\psi(x)^2 + \frac{d}{2}(\partial_x^2 \psi)^2 \right]$$

mit den Randbedingungen $\psi(a) = \psi_a$, $\psi(b) = \psi_b$, $\partial_x \psi(a) = \psi'_a$ und $\partial_x \psi(b) = \psi'_b$. Nehmen Sie an, dass $\psi(x)$ die stationäre Lösung ist und betrachten Sie das Feld $\psi_\lambda(x) = \psi(x) + \lambda \epsilon(x)$, wobei $\epsilon(x)$ eine Abweichung von der stationären Lösung mit den Randbedingungen $\epsilon(a) = \epsilon(b) = \partial_x \epsilon(a) = \partial_x \epsilon(b) = 0$ ist. Bestimmen Sie die Euler-Lagrange Gleichung für das Feld $\psi(x)$ unter der Bedingung, dass $\partial_\lambda F[\psi_\lambda]|_{\lambda=0} = 0$ gilt.

Vorlesung:	Dienstag 10:15 Uhr – 11:45 Uhr im EW 202 Donnerstag 14:15 Uhr – 15:45 Uhr im EW 202
Tutorium:	Do 12:15 Uhr – 13:45 Uhr im EW 733
Scheinkriterien:	Mindestens 50% der Übungspunkte Regelmäßige und aktive Teilnahme am Tutorium Bearbeitung und Vorstellung eines Projekts