Prof. Dr. Sabine Klapp
M. Sc. Alexander Kraft

4. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Kolloidsysteme

Abgabe: Di. 11.11.2014 in der Vorlesung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es die Punkte. Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 9 (10 Punkte): *Paarkorrelationsfunktion, Strukturfaktor*

Für die Beschreibung kritischer Phänomene und der Struktur von Flüssigkeiten spielt die *Paarkorrelationsfunktion*

$$g(\mathbf{r}) = \frac{V}{N^2}\langle \sum_{i=1}^{N} \sum_{i\neq j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{ij})\rangle$$

eine wichtige Rolle. Sie ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen am Ort $\mathbf{r}$ zu treffen, wenn ein willkürlich herausgegriffenes Referenzteilchen am Ort $\mathbf{r} = 0$ ist. Im thermischen Gleichgewicht hängt $g(\mathbf{r})$ eines Fluides aus sphärischen Teilchen nur vom Betrag $r = |\mathbf{r}|$ ab. Die Fouriertransformierte von $g(\mathbf{r}) - 1$ führt auf den *statischen Strukturfaktor*

$$S(\mathbf{k}) = 1 + (2\pi)^3 \frac{N}{V}\delta(\mathbf{k}) + \frac{N}{V}\int d^3r\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}(g(\mathbf{r}) - 1).$$

(i) Berechnen Sie für ein verdünntes Hartekugel-Gas, d.h. mit dem Wechselwirkungspotential

$$\phi(r) = \begin{cases} \infty & r \leq r_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

den *statischen Strukturfaktor* für $\mathbf{k} \neq 0$.

Hinweis: Für verdünnte Gase kann die radiale Verteilungsfunktion $g(r)$ genähert werden durch $g(r) \approx e^{-\beta\phi(r)}$.

(ii) Bestimmen Sie die isotherme Kompressibilität χ_T.

Hinweis: Der Zusammenhang zwischen Strukturfaktor und Kompressibilität ist durch $S(\mathbf{k} = \mathbf{0}) = \frac{N}{V} k_B T \chi_T$ gegeben.

(iii) Berechnen Sie mit χ_T die thermische Zustandsgleichung $P = P(\rho, T)$.

Aufgabe 10 (5 Punkte): *Eigenschaften des statischen Strukturfaktors*

Beweisen Sie die Gültigkeit der in Aufg. 9(ii) genutzten Eigenschaft $S(\mathbf{k} = \mathbf{0}) = \frac{N}{V} k_B T \chi_T$, d.h. der statische Strukturfaktor reduziert sich im Limes sehr langer Wellenlängen auf die isotherme Kompressibilität χ_T.

Bitte Rückseite beachten! $\longrightarrow$

4. Übung TP VI WS14/15

Aufgabe 11 (5 Punkte): *Ornstein-Zernike-Verhalten, Korrelationslängen*
Die Fourier-Transformierte des statischen Strukturfaktors $S(\boldsymbol{k})$ eines homogenen Fluides ist über

$$S(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\rho} \int d^3r \, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} G(\boldsymbol{r})$$

mit der entsprechenden Dichte-Dichte-Korrelationsfunktion

$$G(\boldsymbol{r}) = \langle \rho(\boldsymbol{r})\rho(0) \rangle - \langle \rho(\boldsymbol{r}) \rangle \langle \rho(0) \rangle$$

und $\rho = \frac{N}{V}$ gegeben. Zeigen Sie, dass die totale Korrelationsfunktion $h(r)$ das sog. *Ornstein-Zernike-Verhalten* (r ist der Teilchenabstand, ξ die *Korrelationslänge*) aufweist:

$$h(r) \sim \frac{e^{-r/\xi}}{r}.$$

.
Hinweis: Nehmen Sie an, dass das betrachtete System invariant unter Rotationen und Translationen ist (d.h. $h(\boldsymbol{r}) = h(r)$) und verwenden Sie die in der Vorlesung gezeigte Darstellung

$$(S(k))^{-1} = 1 - \rho\hat{c}(k).$$

Brechen sie die Taylorreihe der direkten Korrelationsfunktion $\hat{c}(k)$ nach dem Term $\propto k^2$ ab, um das gesuchte Ornstein-Zernike-Verhalten für $h(r)$ zu erhalten.

Vorlesung:	Dienstag 10:15 Uhr – 11:45 Uhr im EW 202 Donnerstag 14:15 Uhr – 15:45 Uhr im EW 202
Tutorium:	Do 12:15 Uhr – 13:45 Uhr im EW 733
Scheinkriterien:	Mindestens 50% der Übungspunkte Regelmäßige und aktive Teilnahme am Tutorium Bearbeitung und Vorstellung eines Projekts