5. Schwingungen

5.1 Motivation

Periodische Bewegungen sind in der Natur weit verbreitet. Bisher haben wir uns im wesentlichen mit eindimensionalen (1d) linearen Schwingungen beschäftigt, z.B. mit 1d harmonischen, gedämpften oder erzwungenen Schwingungen, die den Bewegungsgleichungen $m\ddot{x}+kx=0$, $m\ddot{x}+\gamma\dot{x}+kx=0$, bzw. $m\ddot{x}+\gamma\dot{x}+kx=f(t)\overset{\text{z.B.}}{=}a\cos\omega t$ für die Auslenkung x(t) = x(t+T) genügen. T ist die Periode der Schwingung.

Periode und Frequenz harmonischer Schwingungen $x(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$ sind eindeutig durch die Feder-/ Hooke´sche Konstante k und die Masse m bestimmt, $\omega_0^2=k/m$, $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Amplitude und Phase ergeben sich aus den Anfangsbedingungen x(t=0) und $\dot{x}(t=0)$. In der x-$\dot{x}$-Phasenebene sind die Bahnkurven Ellipsen; sie bilden ein Kontinuum im "Raum" der Anfangsbedingungen.

Wir wissen, dass alle finiten eindimensionalen Bewegungen periodisch sind.

Periodischen Bewegungen entsprechen im Phasenraum immer geschlossene Trajektorien.

Nichtlinearen Schwingungen lassen sich grob in konservative und dissipative unterteilen:

■ Anharmonische Schwingungen $\rightarrow$ konservativ nichtlinear

Duffing-Oszillator: $m\ddot{x}+kx+bx^3=0$ oder das ebene mathematische Pendel mit $\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$ bei hinreichend großen Auslenkungen (vgl. Kap. eindimensionale finite Bewegungen). In der Phasenebene sind die Bahnkurven durch $E=\frac{m}{2}\dot{x}^2+\frac{k}{2}x^2+\frac{b}{4}x^4$ gegeben (Kontinuum geschlossener Trajektorien)

■ Selbsterregte Schwingungen (Autoschwingungen) $\rightarrow$ dissipativ nichtlinear

z. B. van der Pol-Oszillator: $\gamma \rightarrow \gamma(x,\dot{x}) = \gamma_0(1-x^2)$, also $m\ddot{x} + \gamma_0(1-x^2)\dot{x} + kx = 0$.

Die Bahnkurve ist eine isolierte geschlossene Trajektorie in der x-$\dot{x}$-Phasenebene mit $\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle^{T}_{x(t)=x(t+T)} = 0$ für kleine γ_0: Gemittelt über eine Periode halten sich aufgenommene und dissipierte Energie $E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2$ die Waage.

Selbsterregte Schwingungen sind in der Mechanik von großem Interesse (Pendeluhren, Flattern von Flugzeugflügeln, …).Außerdem sind sie die Basis oszillierender Stoffwechselvorgänge in der Zelle (Glykolyse, …) und innerer Uhren (zirkadianer Rhythmen, jet lag, …). In räumlich ausgedehnten Medien aus gekoppelten selbsterregten Oszillatoren breiten sich nichtlineare Wellen aus, die u.a. in biologischen Zusammenhängen (Nervenleitung, Herzrhythmusstörungen, …) von fundamentalem Interesse sind (vgl. Kurse zur Nichtlinearen Dynamik im Masterstudiengang).

In diesem Kapitel interessieren wir uns für lineare Schwingungen in Systemen mit vielen Freiheitsgraden, z.B. für

■ gekoppelte Pendel

■ Schwingungen in eindimensionalen Ketten aus N ´Atomen/Molekülen´

■ Atom- und Molekülschwingungen $\rightarrow$ Spektroskopie

■ Schwingungen in Festkörpern $\rightarrow$ Schallausbreitung (Phononen)
$\rightarrow$ Wärmekapazität
Einstein/Debye: $c \sim T^3$, für $T \rightarrow 0$

5.2 Kleinamplitudige Schwingungen in Systemen mit vielen Freiheitsgraden

Wir verwenden verallgemeinerte Koordinaten $\underline{q} = (q_1,\dots,q_f)$, f ist wieder die Anzahl der Freiheitsgrade, und betrachten Schwingungen kleiner Amplitude um eine stabile Gleichgewichtslage $\underline{q}^0$ der potenziellen Energie $U(\underline{q})$, d.h.

$$\left.\frac{\partial U}{\partial q_i}\right|_{\underline{q}^0} = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{\underline{q}^0} =: k_{ij} = k_{ji} - \text{ symmetrisch.}$$

Taylor-Entwicklung der potenziellen Energie in der Umgebung von $\underline{q}^0$ ergibt

$$U(\underline{q}) = U(\underline{q}^0) + \sum_{i=1}^{f} \underbrace{\left.\frac{\partial U}{\partial q_i}\right|_{\underline{q}^0}}_{\text{Null}} \left(q_i - q_i^0\right) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{f} \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{\underline{q}^0} \left(q_i - q_i^0\right)\left(q_j - q_j^0\right) + \dots \cong$$

$$\cong \underbrace{U(\underline{q}^0)}_{\text{konstant}} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i,j=1}^{f}\left(q_i - q_i^0\right)\left(q_j - q_j^0\right)}_{\substack{\text{positiv definite quadratische Form,} \\ \text{damit Gleichgewichtslage stabil}}}.$$

Der Einfachheit halber verschieben wir den Koordinatenursprung in den Punkt $\left(\left(\underline{q}^0\right), U\left(\underline{q}^0\right)\right)$ und bezeichnen die kleinen Abweichungen $\delta q_i = q_i - q_i^0$ mit q_i. So erhalten wir für die potenzielle Energie den Ausdruck

$$U(\underline{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{f} k_{ij}\, q_i\, q_j \quad \rightarrow \underline{\text{harmonischer Näherung für U}}$$

Die kinetische Energie ergibt sich über

$$T(\dot{\underline{r}}) = \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n}{2}\dot{r}_n^2 \underbrace{=}_{\underline{r}=\underline{r}(\underline{q})} \sum_{n=1}^{3N}\frac{m_n}{2}\sum_{i,j=1}^{f}\frac{\partial r_n}{\partial q_i}\dot{q}_i \frac{\partial r_n}{\partial q_j}\dot{q}_j$$

zu

$$T(\underline{q},\dot{\underline{q}}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{f} m_{ij}(\underline{q})\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j \quad \text{mit} \quad m_{ij}(\underline{q}) := \sum_{n=1}^{3N} m_n \frac{\partial r_n}{\partial q_i}\frac{\partial r_n}{\partial q_j} = m_{ji}(\underline{q})\,.$$

In harmonischer Näherung ist

$$T(\dot{\underline{q}}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{f} m_{ij}(0)\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j \;,$$

zu setzen, denn sowohl $\underline{q}$ als auch $\dot{q}$ sind proportional zu der als klein angenommenen Auslenkung. Offensichtlich ist auch die kinetische Energie eine positiv definite quadratischen Form (im Sinne der linearen Algebra).

Fazit: Für kleinamplitudige Schwingungen (harmonische Näherung) um eine stabile Gleichgewichtslage $\underline{q}^0$ in einem System mit f Freiheitsgraden lautet die die Lagrange-Funktion

$$\underline{L(\underline{q},\dot{\underline{q}}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{f}\left(m_{ij}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j - k_{ij}\,q_i\,q_j\right)} \;,\; m_{ij} := m_{ij}(\underline{q}^0) := \sum_{n=1}^{3N} m_n \left.\frac{\partial r_n}{\partial q_i}\right|_{\underline{q}^0} \left.\frac{\partial r_n}{\partial q_j}\right|_{\underline{q}^0} = m_{ji}\,,\; \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{\underline{q}^0} =: k_{ij} = k_{ji}\,.$$

Aus

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = \sum_{j=1}^{f} m_{sj}\,\dot{q}_j \;,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right) = \sum_{j=1}^{f} m_{sj}\,\ddot{q}_j \;,\quad \frac{\partial L}{\partial q_s} = \sum_{j=1}^{f} k_{sj}\,q_j$$

ergeben sich folgende Lagrange-Gleichungen II. Art

$$\sum_{j=1}^{f}(m_{ij}\,\ddot{q}_j + k_{ij}\,q_j) = 0 \;,\; i = 1,\dots,f. \qquad \text{(H1)}$$

Diese Gleichungen beschreiben gekoppelte lineare Schwingungen $\left(\sum_{j=1}^{f}!\right)$: Ein schwingender Freiheitsgrad regt alle übrigen ebenfalls zum Schwingen an, es entstehen kollektive Anregungen.

Da es sich um ein System linearer Differentialgleichungen handelt, verwenden wir den Lösungsansatz

$$q_j(t) = A_j\, e^{i\omega t}\,.$$

Er führt auf das algebraische Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^{f} (-\omega^2 m_{ij} + k_{ij})\, A_j = 0 \;, \qquad \text{(H2)}$$

welches nichttriviale Lösungen $A_j \neq 0$ nur unter der Bedingung

$$\det(-\omega^2 m_{ij} + k_{ij}) = 0 \;\rightarrow \text{charakteristische Gleichung}$$

besitzt. Die charakteristische Gleichung ist ein Polynom vom Grade f in ω^2 mit reellen Koeffizienten, dessen Nullstellen/Wurzeln $\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots, \omega_f^2$ i.a. komplex sind.
Im vorliegenden Falle sind aber alle ω_α^2 reell und positiv, denn $\sum_{i=1}^{f} (\text{H2})\, A_i^*$ führt auf

$$\sum_{i,j=1}^{f} (-\omega^2 m_{ij} + k_{ij})\, A_j A_i^* = 0 \quad \text{also} \quad \omega^2 = \frac{\sum_{i,j=1}^{f} k_{ij} A_j A_i^*}{\sum_{i,j=1}^{f} m_{ij} A_j A_i^*} > 0\,,$$

da Zähler und Nenner positiv definite quadratische Formen und reell[1)] sind. Letzteres kann man leicht direkt zeigen, da für reelle symmetrische Matrizen $\underline{\underline{k}}$ und $\underline{\underline{m}}$

$$\left(\sum_{i,j=1}^{f} k_{ij} A_j A_i^* \right)^* = \sum_{i,j=1}^{f} k_{ij} A_j^* A_i \overset{i \leftrightarrow j}{=} \sum_{i,j=1}^{f} k_{ji} A_i^* A_j \overset{k_{ij}=k_{ji}}{=} \sum_{i,j=1}^{f} k_{ij} A_j A_i^*$$

gilt. Auch aus physikalischer Sicht wären negative oder komplexe ω_α^2 zu verwerfen, weil sie für ω_α Werte mit negativem Imaginärteil nach sich ziehen würden, die exponentiell anwachsenden, instabilen Schwingungen entsprächen. Dies stände im Widerspruch zur angenommenen Stabilität der Gleichgewichtslage q_i^0.

Die positiven reellen Lösungen $\omega_\alpha > 0$ ($\alpha = 1,\ldots,f$) der charakteristischen Gleichung werden Eigenfrequenzen genannt. Sie stellen die für alle Massepunkte m_n gemeinsamen, in den Matrizen $\underline{\underline{k}}$ und $\underline{\underline{m}}$ „verschlüsselten" Schwingungsfrequenzen dar.

Die dazugehörigen Schwingungen mit Amplituden A_j^α aus

$$\sum_{j=1}^{f}(-\omega_\alpha^2 m_{ij} + k_{ij}) A_j^\alpha = 0 , \ i = 1,\ldots,f \tag{H3}$$

heißen Eigenschwingungen/Normalschwingungen/Normalmoden. Sie zeichnen sich durch eine besonders hohe Symmetrie der Bewegung aus. Die allgemeine Lösung ist die Superposition der Eigenschwingungen

$$\underline{q}(t) = \sum_{\alpha=1}^{f} \underline{A}^\alpha B_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha) .$$

2f Anfangsbedingungen legen 2f reellen Integrationskonstanten B_α und φ_α fest.

5.3 Normalschwingungen. Transformation auf Normalkoordinaten

Einschub: Diagonalisierung einer quadratischen Matrix und Hauptachsentransformationen quadratischer Formen (lineare Algebra, MMP)

Finde zur n x n Matrix $\underline{\underline{A}}$ eine Matrix $\underline{\underline{C}}$ derart, dass $\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{C}}$ diagonal ist.
Für symmetrische Matrizen $\underline{\underline{A}}$ ist dieses Problem eindeutig lösbar. Die Spalten von $\underline{\underline{C}}$ bestehen aus den n Eigenvektoren von $\underline{\underline{A}}$ zu den entsprechenden Eigenwerten, die alle reell sind. $\underline{\underline{C}}$ ist eine orthogonale Matrix, d.h. transponierte und invertierte Matrix stimmen überein, $\underline{\underline{C}}^{-1} = \underline{\underline{C}}^T$.

Mit Hilfe der quadratischen Matrix

$$\underline{\underline{a}} = \left(A_i^\alpha\right) = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \dots & A_1^f \\ A_2^1 & A_2^2 & \dots & A_2^f \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_f^1 & A_f^2 & \dots & A_f^f \end{pmatrix}$$

aus den Spaltenvektoren $\underline{A}^\alpha$ gemäß (H3)[1)] führen wir neue verallgemeinerte Koordinaten Q_α

$$q_i = \sum_{\alpha=1}^{f} A_i^\alpha\, Q_\alpha \quad \text{bzw.} \quad \underline{q} = \underline{\underline{a}}\,\underline{Q}, \quad \underline{Q} = \underline{\underline{a}}^{-1}\underline{q}$$

ein. Aus (H1) ergeben sich die Bewegungsgleichungen für die neuen Koordinaten zu

$$0 = \sum_{j=1}^{f} (m_{ij}\,\ddot{q}_j + k_{ij}\,q_j) = \sum_{j=1}^{f}\sum_{\alpha=1}^{f} (m_{ij}\,A_j^\alpha\,\ddot{Q}_\alpha + k_{ij}\,A_j^\alpha\,Q_\alpha) \quad \Big| \cdot A_i^\beta (\text{von links}),\ \sum_{i=1}^{f}$$

$$0 = \sum_{\alpha=1}^{f} \left(\ddot{Q}_\alpha \underbrace{\sum_{i\,j=1}^{f} A_i^\beta m_{ij}\,A_j^\alpha}_{\delta_{\alpha\beta}} + Q_\alpha \underbrace{\sum_{i\,j=1}^{f} A_i^\beta k_{ij}\,A_j^\alpha}_{\omega_\alpha^2\,\delta_{\alpha\beta}} \right) = \ddot{Q}_\beta + \omega_\beta^2\,Q_\beta\,.$$

Sie beschreiben <u>entkoppelte</u>, voneinander unabhängige harmonische Schwingungen mit Eigenfrequenzen ω_α. Das bedeutet für die Lagrange-Funktion

$$L(\underline{Q},\dot{\underline{Q}}) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{f} (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2\,Q_\alpha^2)\,,$$

wie man auch leicht direkt zeigt:

$$2L(\underline{q},\underline{\dot q}) = \sum_{i,j=1}^{f}\left(m_{ij}\,\dot q_i\,\dot q_j - k_{ij}\,q_i\,q_j\right) = \underline{\dot q}^T\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\dot q} - \underline{q}^T\,\underline{\underline{k}}\,\underline{q} = (\underline{\underline{a}}\,\underline{\dot Q})^T\,\underline{\underline{m}}\,(\underline{\underline{a}}\,\underline{\dot Q}) - (\underline{\underline{a}}\,\underline{Q})^T\,\underline{\underline{k}}\,(\underline{\underline{a}}\,\underline{Q}) =$$

$$= \underline{\dot Q}^T(\underline{\underline{a}}^T\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{a}})\underline{\dot Q} - \underline{Q}^T(\underline{\underline{a}}^T\,\underline{\underline{k}}\,\underline{\underline{a}})\underline{Q} = \sum_{\alpha=1}^{f}(\dot Q_\alpha^2 - \omega_\alpha^2\,Q_\alpha^2)\,.$$

Die oben verwendeten Orthogonalitätsrelationen

$$\sum_{i,j=1}^{f} A_i^\alpha\, m_{ij}\, A_j^\beta = \delta_{\alpha\beta} \text{ und } \sum_{i,j=1}^{f} A_i^\alpha\, k_{ij}\, A_j^\beta = \omega_\alpha^2\,\delta_{\alpha\beta}$$

lassen sich einfach direkt verifizieren. Sind alle ω_α voneinander verschieden (keine Entartung), folgt aus (H2) $\sum_{j=1}^{f} k_{ij}\,A_j^\alpha = \omega_\alpha^2 \sum_{j=1}^{f} m_{ij}\,A_j^\alpha$ nach Multiplikation mit A_i^β und Summation über i einerseits

$$\underline{\sum_{ij=1}^{f} A_i^\beta\, k_{ij}\, A_j^\alpha} = \omega_\alpha^2 \sum_{j=1}^{f} A_i^\beta\, m_{ij}\, A_j^\alpha = \omega_\alpha^2 \sum_{i,j=1}^{f} A_j^\alpha\, m_{ij}\, A_i^\beta \underset{\substack{i\leftrightarrow j\\ m_{ij}=m_{ji}}}{=} \underline{\underline{\omega_\alpha^2 \sum_{i,j=1}^{f} A_i^\alpha\, m_{ij}\, A_j^\beta}}\,.$$

Andererseits ist

$$\sum_{j=1}^{f} k_{ij}\,A_j^\beta = \omega_\beta^2 \sum_{j=1}^{f} m_{ij}\,A_j^\beta \;\;\Big|\cdot A_i^\alpha, \sum_{i=1}^{f} \;\; \rightarrow \sum_{i,j=1}^{f} A_i^\alpha\, k_{ij}\, A_j^\beta = \underline{\underline{\omega_\beta^2 \sum_{i,j=1}^{f} A_i^\alpha\, m_{ij}\, A_j^\beta}} \underset{\substack{i\leftrightarrow j\\ k_{ij}=k_{ji}}}{=} \underline{\sum_{i,j=1}^{f} A_i^\beta\, k_{ij}\, A_j^\alpha}$$

Subtraktion liefert die erste Orthogonalitätsbedingung,

$$0 = (\omega_\alpha^2 - \omega_\beta^2)\sum_{i,j=1}^{f} A_i^\alpha\, m_{ij}\, A_j^\beta$$

vorausgesetzt, es liegt keine Entartung vor. Die zweite folgt analog. Beide Orthogonalitäts-relationen (H4) können mit $\underline{\underline{a}}$ und $\underline{A}^\alpha$ in kompakter Form formuliert werden

$$\sum_{i,j=1}^{f} A_i^\alpha m_{ij} A_j^\beta = \underline{A}^\alpha \underline{\underline{m}}\, \underline{A}^\beta = \delta_{\alpha\beta}\,, \quad \underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{a}} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i,j=1}^{f} A_i^\alpha k_{ij} A_j^\beta = \underline{A}^\alpha \underline{\underline{k}}\, \underline{A}^\beta = \omega_\alpha^2\, \delta_{\alpha\beta}\,, \quad \underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{k}}\,\underline{\underline{a}} = \omega_\alpha^2 \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} .$$

<u>Beispiele</u> (vgl. Übung)

■ Doppelpendel (zwei gleichlange Pendelarme, l, und gleiche Massen, m, f = 2)

zwei Eigenfrequenzen und Eigenschwingungen

$\omega_1^2 = (2+\sqrt{2})\frac{g}{l},\ A_2 = -\sqrt{2}\,A_1$ Pendel schwingen entgegengesetzt, gegenphasig

$\omega_2^2 = (2-\sqrt{2})\frac{g}{l},\ A_2 = \sqrt{2}\,A_1$ Pendel schwingen in gleiche Richtung, in Phase

■ N über Federn (k) gekoppelte MP (Massen m) auf einem Kreis (Radius R), → Übungsblatt

6. Das Zwei-Körper-Problem und die Bewegung im Zentralfeld

6.1 Problemstellung, Lagrange-Funktion, Relativ- und Schwerpunktskoordinaten, Relativbewegung

Betrachtet werden zwei Punktmassen m_1 und m_2 an den Orten $\underline{r}_1(t)$ und $\underline{r}_2(t)$, die über ein abstandsabhängiges Potenzial $U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)$ miteinander wechselwirken und ansonsten keinen weiteren Kräften wie äußeren Feldern, Reibungskräften usw. ausgesetzt sind. Die Lagrange-Funktion lautet

$$L(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dot{\underline{r}}_1, \dot{\underline{r}}_2) = \frac{m_1}{2}\,\dot{\underline{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\,\dot{\underline{r}}_2^2 - U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)\ .$$

Sie ist nicht explizit zeitabhängig, d.h., es gilt Energieerhaltung (s.u.).

Wir führen zunächst Schwerpunkts- und Relativkoordinaten $\underline{R}(t)$ bzw. $\underline{r}(t)$ ein

$$\underline{R}(t) := \frac{m_1 \underline{r}_1(t) + m_2 \underline{r}_2(t)}{M}, \quad \underline{r}(t) := \underline{r}_1(t) - \underline{r}_2(t), \quad M := m_1 + m_2 \text{ - Gesamtmasse.}$$

Sind die Abhängigkeiten $\underline{R}(t)$ und $\underline{r}(t)$ bekannt, lassen sich über

$$\underline{r}_1(t) = \underline{R}(t) + \frac{m_2}{M}\underline{r}(t) \quad \text{und} \quad \underline{r}_2(t) = \underline{R}(t) - \frac{m_1}{M}\underline{r}(t)$$

die gesuchten Bahnkurven $\underline{r}_1(t)$ und $\underline{r}_2(t)$ der beiden Punktmassen bestimmen. Nach einfachen algebraischen Umformungen finden wir für die transformierte Lagrange-Funktion

$$L(\underline{r}, \underline{R}, \dot{\underline{r}}, \dot{\underline{R}}) = \frac{M}{2}\dot{\underline{R}}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\underline{r}}^2 - U(r),$$

wobei $\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ die sogenannte reduzierte Masse bezeichnet. Da $\underline{R}$ eine zyklische Variable ist, folgt $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{R}}}\right) = 0$ also $M\dot{\underline{R}}(t) = \text{const}$. Das bedeutet, der Gesamtimpuls ist Integral der Bewegung und Schwerpunkt der beiden Punktmassen bewegt sich geradlinig-gleichförmig. Dieses Ergebnis haben wir wegen der Homogenität des Raumes im Fall des Zwei-Körperproblems von vornherein erwartet.

Sinnvollerweise legen wir nun den Koordinatenursprung in den Schwerpunkt (Inertialkräfte treten nicht auf) und befassen uns fortan nur mit der Relativbewegung, deren Lagrange-Funktion

$$L(\underline{r}, \dot{\underline{r}}) = \frac{\mu}{2}\dot{\underline{r}}^2 - U(r)$$

lautet. Sie beschreibt die dreidimensionale Bewegung eines fiktiven Teilchens der Masse μ im Zentralpotenzial $U(r)$.