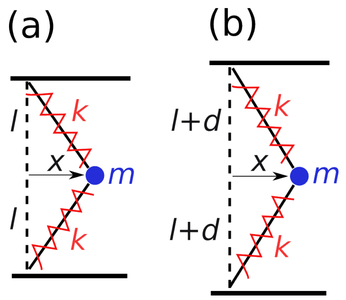
Prof. Dr. Harald Engel
Kilian Kuhla, Judith Lehnert, Benjamin Lingnau, Alejandro Torres Orjuela, Maximilian Schmitt,
Dr. Katrin Wolff, Maria Zeitz, Alexander Ziepke

11. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: Fr. 16.1.2015 bis 13:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

M **Aufgabe 31**: *Duffing Oszillator*

Gegeben sei ein Massenpunkt, der horizontal ausgelenkt wird. Die Gleichgewichtslänge der Hookeschen Federn sei l. Hinweis: $\frac{1}{\sqrt{a^2+\epsilon^2}} \approx \frac{1}{a} - \frac{\epsilon^2}{2a^3}$ für $\epsilon \ll 1\,, a > 0$.

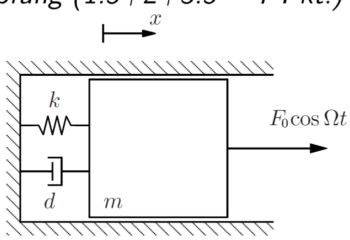


(a) Berechnen Sie F_x, d.h. die x-Komponente der Kraft, die auf die Masse wirkt. Entwickeln Sie die Kraft in Potenzen von $\frac{x}{l}$ und zeigen Sie, dass $F_x = -kl\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \ldots$ gilt.

(b) Wiederholen Sie die Rechnung für den Fall, dass die Federn vorgespannt sind und zeigen Sie, dass $F_x = -2k\frac{dl}{l+d}\frac{x}{l} - kl\left(\frac{l}{l+d}\right)^3\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \ldots$ gilt.

S **Aufgabe 32 (7 Punkte):** *Erzwungene Schwingungen mit Dämpfung (1.5+2+3.5 = 7 Pkt.)*

Gegeben sei ein Schwinger, der mit einer periodischen Kraft $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ angetrieben wird. Für die Auslenkung $x(t)$ gilt:



$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f\cos\Omega t\ ,$$

mit $\delta = \frac{d}{2m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ und $f = \frac{F_0}{m}$.

(a) Lösen Sie die homogene Gleichung für den Fall schwacher Dämpfung, d.h. $\delta^2 < \omega_0^2$. Verwenden Sie die Anfangsbedingungen $x = 0$ und $\dot{x} = v_0$ bei $t = 0$ und skizzieren Sie $x(t)$.

(b) Nun lösen Sie die inhomogene Gleichung. Interpretieren Sie f als Realteil einer komplexen Kraft: $f = \Re(\tilde{f})$, und $x = \Re(\tilde{x})$. Im Komplexen lautet die inhomogene Gleichung dann:

$$\ddot{\tilde{x}} + 2\delta\dot{\tilde{x}} + \omega_0^2\tilde{x} = \tilde{f}\ .$$

Setzen Sie $\tilde{f} = fe^{i\Omega t}$ sowie $\tilde{x} = x_0 e^{i\Omega t}$ und bestimmen Sie die komplexe Amplitude x_0. Stellen Sie x_0 in polarer Form dar: $x_0 = Ae^{i\theta}$. Zeigen Sie, dass $x(t) = A\cos(\Omega t + \theta)$ und geben Sie A und θ an. Geben Sie die vollständige Lösung an. Welcher Teil der Lösung ist relevant für lange Zeiten?

(c) Studieren Sie nun die Duffing-Gleichung

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = f\cos\Omega t\ .$$

Diese modelliert das System aus Aufgabe 31 (b), erweitert um einen Dämpfer und eine periodische Kraft.[1] Setzen Sie als Ansatz die Lösung aus (b) $x = A\cos(\Omega t+\theta)$ in die Duffing-Gleichung ein. Verwenden Sie $\cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}$, $\cos x = \cos(x+y)\cos x + \sin(x+y)\sin y$ [für $f\cos\Omega t$] und die Orthogonalität von $\sin x$ und $\cos x$ um einen Ausdruck für f^2 zu finden.

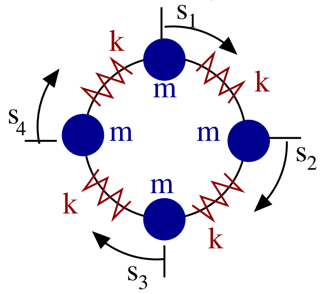
(i) Zeigen Sie, dass $A = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\delta^2\Omega^2}}$ für den Fall, dass A klein ist. Die Resonanzfrequenz Ω_r erhält man in dem man $f = \delta = 0$ setzt. Zeigen Sie, dass $\Omega_r = \omega_0$.

(ii) Bestimmen Sie die Resonanzfrequenz Ω_r für allgemeines A. Was fällt auf im Vergleich zu Fall (i)?

Skizzieren Sie die sog. Vergrößerungsfunktion $A(\Omega)$ für beide Fälle.

[1]Georg Duffing (* 1861 Waldshut, † 1944 Schwedt) hat diese Gleichung 1918 an der TU Berlin aufgestellt.

S **Aufgabe 33 (3 Punkte):** *Gekoppelte Massenpunkte auf einem Kreis (1+1+1=3 Punkte)*



Vier Massenpunkte der Masse m bewegen sich auf einem Kreis mit Radius R. Jeder Massenpunkt ist mit den beiden jeweils benachbarten Massenpunkte über eine Feder der Federkonstante k verbundenen. Verwenden Sie im Folgenden als Koordinaten die Bogenlängen s_i, $i = 1, 2, 3, 4$, wobei s_i den Abstand der $i$ten Masse von ihrer Gleichgewichtslage beschreibt.

(a) Stellen Sie die gekoppelte Bewegungsgleichungen für die vier Massepunkte auf. Formulieren Sie diese in Matrixform: $\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{M}\mathbf{s}$, wobei $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3, s_4)^T$ und $\mathbf{M}$ eine Matrix ist, deren Koeffizienten sich aus der Bewegungsgleichung ergeben.

(b) Lösen Sie nun das lineare Differentialgleichungssystem $\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{M}\mathbf{s}$, indem Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathbf{M}$ bestimmen. Die negativen Eigenwerte von $\mathbf{M}$ sind gerade die Quadrate der Eigenfrequenzen. Warum? Zeigen Sie so, dass für die Eigenfrequenzen gilt

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^2 = 4\frac{k}{m}, \quad \omega_3^2 = \omega_4^2 = 2\frac{k}{m}. \tag{1}$$

(c) Interpretieren Sie das Ergebnis, indem Sie die Eigenschwingungen (also die Eigenvektoren von $\mathbf{M}$) zur jeder der oben gegeben Frequenzen betrachten. Überlegen Sie also für jeden der vier Fälle, welche Massen gleichphasig und welche gegenphasig schwingen.

Hinweis: Wer möchte darf gerne die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathbf{M}$ mit Mathematica berechnen. Bitte, dann den Mathematica Ausdruck der Lösung beilegen.

	Mo	**Di**	**Mi**	**Do**	**Fr**
08-10		EW 202 HE	EW 202 HE		
10-12		EW 731 MZ HL 102 AZ EW 733 JL		H 3013 KW	EW 731 MS
12-14			EW 731 KK		
14-16	EW 114 AZ	H 2033 ATO		HL 102 BL	
16-18		EW 229 ATO	EW 229 KK		

Sprechstunden			
HE	Prof. Dr. Harald Engel	Mi 14:30-16	EW 738
ATO	Alejandro Torres Orjuela	Di 12-13	EW 060
AZ	Alexander Ziepke	Fr 11-12	EW 060
BL	Benjamin Lingnau	Di 14-15	EW 629
JL	Judith Lehnert	Mo 15-16	ER 246
KK	Kilian Kuhla	Mi 14:45-15:45	EW 060
KW	Dr. Katrin Wolff	Mi 10-11	EW 277B
MS	Max Schmitt	Mo 12-13	EW 708
MZ	Maria Zeitz	Do 14-15	EW 702