

Prof. Dr. Harald Engel
 Alice von der Heydt, Kilian Kuhla, Judith Lehnert, Benjamin Lingnau, Alejandro Torres Orjuela,
 Maximilian Schmitt, Dr. Katrin Wolff, Maria Zeitz, Alexander Ziepeke

12. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: Fr. 23.01.2015 bis 13:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

M Aufgabe 34: Runge-Lenz-Vektor

- (a) Betrachten Sie die Bewegung eines Körpers der Masse m im Zentralpotential $U(r) = -\frac{\alpha}{r^n}$. Zeigen Sie, dass der Runge-Lenz-Vektor

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - m\alpha \frac{\mathbf{r}}{r}$$

nur im Fall $n = 1$ eine Erhaltungsgröße ist.

- (b) Ermitteln Sie mithilfe des Runge-Lenz-Vektors die möglichen Bahnkurven $r(\varphi)$ der Bewegung im Potential $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$. Betrachten Sie dazu den Winkel φ zwischen \mathbf{r} und \mathbf{A} .

Hinweis: Verwenden Sie die Rechenregeln für das doppelte Kreuzprodukt, $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$, und das Spatprodukt $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

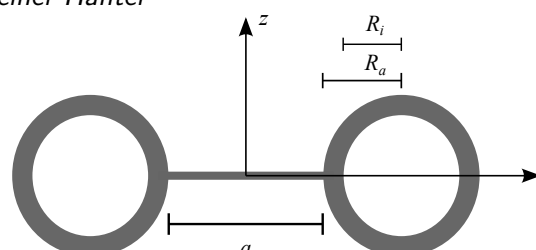
S Aufgabe 35 (7 Punkte): Zwei-Körper-Problem im Hamilton-Jacobi-Formalismus

Behandeln Sie das Zwei-Körper-Problem in Relativkoordinaten mit Hilfe der Hamilton-Jacobi-Gleichung. Die potentielle Energie ist gegeben durch $V(r) = -\frac{k}{r}$ mit $k = \gamma\mu M$, mit der reduzierten Masse μ und der Gesamtmasse M .

- (a) Leiten Sie ausgehend von der Lagrange-Funktion der Relativbewegung in Kugelkoordinaten $L(r, \varphi, \vartheta)$ (siehe VL) die Hamilton-Funktion her.
- (b) Warum lässt sich die Wirkung schreiben als $S(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = S_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}) - Et$? Formulieren Sie damit die Hamilton-Jacobi-Gleichung.
- (c) Welche Variable ist zyklisch? Warum können wir deshalb eine neue Konstante einführen? Nennen Sie diese Konstante α_φ .
- (d) Machen Sie den Separationsansatz $S_0 = S_r(r) + S_\vartheta(\vartheta) + S_\varphi(\varphi)$. Warum zerfällt die verbleibende Differentialgleichung in zwei unabhängige Differentialgleichungen? Nennen Sie die dabei auftauchende neue Konstante α_ϑ^2 .
- (e) Zeigen Sie, dass diese Konstante das Quadrat des Gesamtdrehimpulses ist!
Hinweis: Drücken Sie \mathbf{r}, \mathbf{p} in $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ in Kugelkoordinaten aus!
- (f) Berechnen Sie die generalisierten Koordinaten $Q_r, Q_\varphi, Q_\vartheta$ als Ableitungen der Wirkungsfunktion. *Hinweis:* Als Ergebnis erhalten Sie Integralausdrücke. Die auftretenden Integrale müssen nicht ausgewertet werden.
- (g) Berechnen Sie die Impulse $p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}$.

S Aufgabe 36 (3 Punkte): Trägheitsmoment einer Hantel

Gegeben sei eine Hantel aus zwei Hohlkugeln und einem masselosen Stab. Der Innenradius der Hohlkugeln sei R_i , der Außenradius R_a . Die Hohlkugeln sitzen mittig auf der x -Achse und ihre Masse M sei homogen verteilt. Der verbindende Stab habe eine Länge a und sei masselos.



12. Übung TPI WS 14

- (a) Leiten Sie das Trägheitsmoment einer Hohlkugel für eine Drehung um ihren Schwerpunkt her.
- (b) Berechnen Sie davon ausgehend die Trägheitsmomente der Hantel für Drehungen um die x -, y - und z -Achse. *Hinweis:* Sie dürfen den Satz von Steiner benutzen.

| | Mo | Di | Mi | Do | Fr |
|-------|-----------|-------------------------------------|-----------|-----------|-----------|
| 08-10 | | EW 202 HE | EW 202 HE | | |
| 10-12 | | EW 731 MZ HL 102 AZ EW 733 JL | | H 3013 AH | EW 731 MS |
| 12-14 | | | EW 731 KK | | |
| 14-16 | EW 114 AZ | H 2033 ATO | | HL 102 BL | |
| 16-18 | | EW 229 ATO | EW 229 KK | | |

| Sprechstunden | | | |
|---------------|--------------------------|----------------|--------|
| HE | Prof. Dr. Harald Engel | Mi 14:30-16 | EW 738 |
| AH | Alice von der Heydt | Mi 10-11 | EW 266 |
| ATO | Alejandro Torres Orjuela | Di 12-13 | EW 060 |
| AZ | Alexander Ziepke | Fr 11-12 | EW 060 |
| BL | Benjamin Lingnau | Di 14-15 | EW 629 |
| JL | Judith Lehnert | Mo 15-16 | ER 246 |
| KK | Kilian Kuhla | Mi 14:45-15:45 | EW 060 |
| MS | Max Schmitt | Mo 12-13 | EW 708 |
| MZ | Maria Zeitz | Do 14-15 | EW 702 |