Prof. Dr. Harald Engel
Kilian Kuhla, Judith Lehnert, Benjamin Lingnau, Alejandro Torres Orjuela, Maximilian Schmitt,
Dr. Katrin Wolff, Maria Zeitz, Alexander Ziepke

2. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: Fr. 31.10.2014 bis 13:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

S Aufgabe 4 (5 Punkte): *Raketenantrieb*

Beim Raketenantrieb werden Triebgase mit einer bestimmten Geschwindigkeit v_G (relativ zur Rakete) nach hinten ausgestoßen, die eine Rückstosskraft auf die Rakete ausüben und diese beschleunigen. Dies hat zur Folge, dass die Masse der Rakete $M(t)$ zeitabhängig ist. Es sei $M_0 = M(0)$ die Masse zur Zeit $t = 0$ und $M_L = M(T)$ die Masse der Rakete mit leeren Tanks nach Brennschluss zur Zeit $t = T$. Wir setzen einen konstanten Masseausstoß pro Zeiteinheit $K = -\dot{M}(t) > 0$ mit $K = const.$ voraus. Die Geschwindigkeit der Rakete sei $v_R(t) = \dot{x}(t)$, es soll nur eine Bewegung entlang der x-Achse betrachtet werden.

(a) Berechnen Sie die Masse $M(t)$ der Rakete zur Zeit $0 \le t \le T$.

(b) Zeigen Sie anhand der Newtonschen Axiome, dass die Bewegung der Raketengleichung

$$M(t)\frac{dv_R}{dt} + v_G\frac{dM(t)}{dt} = F_{\text{ext}}$$

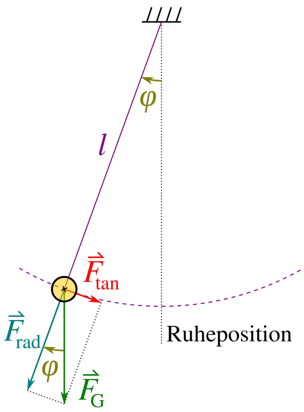
folgt, wobei F_{ext} die Summe aller externen Kräfte bedeutet.

Hinweis: Zerlegen Sie den Gesamtimpuls des Systems in den Impuls p_R der Rakete (mitsamt des verbliebenen Treibstoffs) sowie den Impuls p_A des ausgestoßenen Abgases. Überlegen Sie zunächst wie die Impulsbilanz zu einem festen Zeitpunkt t aussieht. Stellen Sie anschließend die Impulsbilanz zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ auf, wobei Δt eine kleine Änderung in der Zeit sein soll.

(c) Nehmen Sie an, die Rakete startet zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ von der Erde $x_0 = 0$. Nehmen Sie zusätzlich vereinfachend an, daß die externe Kraft durch die Gravitation $F_{\text{ext}} = M(t)g$ mit fester Erdbeschleunigung g gegeben sei. Welche Geschwindigkeit $v_R(T)$ und welche Höhe $x(T)$ wird zum Zeitpunkt T (wenn also der Brennstoff vollständig verbraucht ist) erreicht?

S Aufgabe 5 (5 Punkte): *Fadenpendel*

Im Bild sehen Sie ein ebenes Fadenpendel im homogenen Schwerefeld, dabei sei φ der Winkel zur Senkrechten, l die Länge des Fadens.



(a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für $\varphi(t)$.

(b) Bestimmen Sie die Periodendauer $\tilde{T}$ in der Näherung $\varphi \ll 1$.

(c) Betrachten Sie nun den Fall, dass die Näherung $\varphi \ll 1$ nicht gilt und leiten Sie einen Ausdruck (ein Integral) für die Periodendauer T her. Verwenden Sie dazu die Anfangsbedingungen $\varphi(t = 0) = \varphi_0 < \pi$ und $\dot{\varphi}(t = 0) = 0$. *Hinweis:* Multiplizieren Sie die Bewegungsgleichung mit $\dot{\varphi}$ und trennen Sie die Variablen. Schauen Sie in die Vorlesung.

(d) Beweisen Sie, dass man für kleine Auslenkungen unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung $\mathcal{O}(\varphi^4)$ die Periodendauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16}\right)$$

erhält.

Hinweis: Nehmen Sie dazu die die Formel

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}$$

wobei $k^2 = \sin^2(\varphi_0/2)$ und $u = \arcsin\left(\frac{\sin(\varphi/2)}{\sin(\varphi_0/2)}\right)$ seien. Lösen Sie das Integral elliptische Integral erster Gattung. Entwickeln Sie dazu den Integranden für kleine Werte von k^2 bis zur Ordnung $\mathcal{O}(k^2)$ bevor Sie das Integral ausführen.

M **Aufgabe 6**: *Konservative Kräfte*
Gegeben sei das Kraftfeld

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (a \sin y, x \cos y + \sin z, b\, y \cos z),\ a, b \in \mathbb{R}\ .$$

(a) Für welche Werte von a und b ist $\mathbf{F}$ konservativ ($\nabla \times \mathbf{F} = 0$)? Bestimmen Sie für diese Werte alle Potentiale von $\mathbf{F}$.

(b) Für die unter (a) gefundenen Werte berechne man $\int\limits_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, falls C eine beliebige Kurve ist, die den Anfangspunkt $\mathbf{A} = (0, \pi, 3\pi)$ mit dem Endpunkt $\mathbf{E} = (1, \frac{\pi}{2}, 5\pi)$ verbindet.

	Mo	**Di**	**Mi**	**Do**	**Fr**
08-10		EW 202 HE	EW 202 HE		
10-12		EW 731 MZ HL 102 AZ EW 733 JL		H 3013 KW	EW 731 MS
12-14			EW 731 KK		
14-16	EW 114 AZ	H 2038 ATO		HL 102 BL	
16-18		EW 229 ATO	EW 229 KK		

Sprechstunden			
HE	Prof. Dr. Harald Engel	Mi 14:30-16	EW 738
ATO	Alejandro Torres Orjuela	Di 12-13	EW 060
AZ	Alexander Ziepke	Fr 11-12	EW 060
BL	Benjamin Lingnau	Di 14-15	EW 629
JL	Judith Lehnert	Mo 15-16	ER 246
KK	Kilian Kuhla	Mi 15-16	EW 060
KW	Dr. Katrin Wolff	Mi 10-11	EW 277B
MS	Max Schmitt	Fr 14-15	EW 708
MZ	Maria Zeitz	Do 14-15	EW 702