

Prof. Dr. Harald Engel
 Kilian Kuhla, Judith Lehnert, Benjamin Lingnau, Alejandro Torres Orjuela, Maximilian Schmitt,
 Dr. Katrin Wolff, Maria Zeitz, Alexander Ziepke

9. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: Fr. 19.12.2014 bis 13:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

M Aufgabe 25: *Teilchen im elektromagnetischen Feld und Legendre-Transformation*

- (a) Betrachten Sie ein Teilchen mit der Ladung q im elektromagnetischen Feld, das sich durch das generalisierte Potential

$$V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = q(\phi(\mathbf{r}, t) - \dot{\mathbf{r}}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))$$

darstellen lässt. Berechnen Sie daraus die Hamilton-Funktion des Teilchens.

- (b) Berechnen Sie allgemein die Legendre-Transformierte (bzgl. \mathbf{p}) der Hamiltonfunktion $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$.

S Aufgabe 26 (3 Punkte): *Kanonische Transformation*

- (a) Berechnen Sie mit Hilfe der Erzeugenden

$$F(q, Q) = k \frac{q^2}{2 \tan Q}$$

(mit $k = \text{const.}$) die kanonischen Transformationen

$$Q = Q(q, p), \quad P = P(q, p)$$

und deren Umkehrungen $q(Q, P), p(Q, P)$. Verwenden Sie die Transformationsformeln

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} \qquad P = -\frac{\partial F}{\partial Q}.$$

- (b) Die Hamiltonfunktion sei nun

$$\tilde{H}(P, Q) = \frac{k}{m} P.$$

Wie lautet $H(p, q)$? Welches physikalische System beschreibt $H(p, q)$, wenn $q = x, p = m\dot{x}$ und $k = m\omega$?

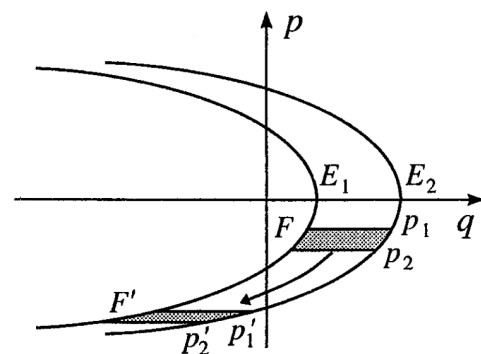
S Aufgabe 27 (7 Punkte): *Liouvillescher Satz*

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich eindimensional im konstanten Gravitationsfeld.

- (a) Zeigen Sie, dass für die Gesamtenergie E gilt:

$$H = E = \frac{p^2}{2m} + mgq.$$

- (b) Die Phasenraumbahnen $q(p, E)$ sind demnach Parabeln mit der Gesamtenergie E als Parameter. Betrachten Sie nun eine Anzahl von Teilchen, deren Impulse zur Zeit $t = 0$ in den Grenzen $p_1 \leq p \leq p_2$ und deren Energien zwischen $E_1 \leq E \leq E_2$ liegen. Berechnen Sie die Fläche



$$F = \int_{p_1}^{p_2} \int_{q_1}^{q_2} dq dp,$$

die die Teilchenzustände im Phasenraum überdecken. Berechnen Sie mithilfe der Hamilton'schen Bewegungsgleichungen die Fläche F' zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$. Was stellen Sie fest?

Bitte Rückseite beachten! →

9. Übung TPI WS 14

(c) Betrachten Sie nun die kanonische Transformation, die durch die Erzeugende

$$F(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = \sum_i q_i P_i + H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \delta t$$

gegeben ist. Hierbei ist H eine beliebige Hamilton-Funktion und δt ein infinitesimaler Zeitschritt. Berechnen Sie aus den Transformationsformeln

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} \quad Q_i = \frac{\partial F}{\partial P_i} \quad \mathcal{H} = H + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (1)$$

die transformierten Größen P_i , Q_i , \mathcal{H} . Was macht die gegebene Transformation mit dem System? *Hinweis:* Drücken Sie \mathbf{p} in $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ als Funktion von \mathbf{P} aus.

(d) Zeigen Sie nun im eindimensionalen Fall, dass kanonische Transformationen mit der allgemeinen Erzeugenden $\mathcal{F}(q, P, t)$ das Phasenraumvolumen nicht ändern, also:

$$\int d\Gamma \equiv \int dq dp \stackrel{!}{=} \int dQ dP. \quad (2)$$

Die Variablentransformation im Mehrfachintegral lässt sich bekanntermaßen darstellen durch

$$dQ dP = D dq dp$$

mit der Funktionaldeterminante D . Zeigen Sie, dass sich D ausdrücken lässt durch

$$D = \frac{\partial Q}{\partial q} \left[\frac{\partial p}{\partial P} \right]^{-1}.$$

Verwenden Sie nun die Transformationsformeln (1) und beweisen Sie damit (2). Das lässt sich auch für höherdimensionale Fälle zeigen (ohne Beweis). Was folgt also mit dem Ergebnis aus (c) allgemein für das Phasenraumvolumen während der zeitlichen Entwicklung eines Hamilton'schen Systems?

	Mo	Di	Mi	Do	Fr
08-10		EW 202 HE	EW 202 HE		
10-12		EW 731 MZ HL 102 AZ EW 733 JL		H 3013 KW	EW 731 MS
12-14			EW 731 KK		
14-16	EW 114 AZ	H 2033 ATO		HL 102 BL	
16-18		EW 229 ATO	EW 229 KK		

Sprechstunden			
HE	Prof. Dr. Harald Engel	Mi 14:30-16	EW 738
ATO	Alejandro Torres Orjuela	Di 12-13	EW 060
AZ	Alexander Ziepke	Fr 11-12	EW 060
BL	Benjamin Lingnau	Di 14-15	EW 629
JL	Judith Lehnert	Mo 15-16	ER 246
KK	Kilian Kuhla	Mi 14:45-15:45	EW 060
KW	Dr. Katrin Wolff	Mi 10-11	EW 277B
MS	Max Schmitt	Mo 12-13	EW 708
MZ	Maria Zeitz	Do 14-15	EW 702