

Prof. Dr. Tobias Brandes  
Dr. Javier Cerrillo

### 10. Übungsblatt – Statistische Mechanik

**Abgabe: Mi. 11.02.2015 im Tutorium**

*Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.*

**Aufgabe 16 (10 Punkte): XY-Modell**

Bei niedrigen Temperaturen kann man das XY-Modell

$$(1) \quad H_{XY} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j,$$

wobei  $\mathbf{S}_i$  2-komponentige Spins sind, durch das Spinwellen-Modell approximieren

$$(2) \quad H_{SW} = -\frac{J}{2} \sum_{\langle ij \rangle} (\theta_i - \theta_j)^2.$$

1. Begründen Sie die Spinwellen Approximation.
2. Berechnen Sie die Korrelationsfunktion der Winkel.

$$(3) \quad G(\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j) \equiv \langle \theta_i \theta_j \rangle = \frac{a^2}{\beta J} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)}}{4 - 2 \cos(k_x a) - 2 \cos(k_y a)}.$$

Hinweis: Beachten Sie, dass die Summe in (2) über nächste Nachbarpaare läuft.

3. Benutzen Sie diese Ergebnisse um einer Approximation der Zustandssumme des Villain-Modells herzuleiten.

Extra 10 Punkte:

1. Zeigen Sie, welche Ladungserhaltung im Villain-Modell gelten muss.
2. Zeigen Sie, welchen Wert diese effektiven Ladungen haben müssen.