Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Javier Cerrillo

4. Übungsblatt – Statistische Mechanik

Abgabe: Fr. 14.11.2014 in der Vorlesung
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 7 (5 Punkte): *Wechselwirkende Bosonen*

Betrachten Sie N identische Bosonen der Masse m, die in einem äußeres Potential $V(\mathbf{r})$ gefangen sind. Bei Temperatur $T = 0$ und idealen nicht-wechselwirkenden Teilchen sitzen alle Bosonen im Grundzustand $\psi_g(\mathbf{r})$ der Fälle, damit die allgemeine Wellenfunktion

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N) = \prod_{i=1}^{N} \psi_g(\mathbf{r}_i) \tag{1}$$

lautet. Bei einer kleinen Wechselwirkung zwischen den Teilchen $U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ weicht der Grundzustand von (1) nur leicht ab, damit Korrelationen im neuen Grundzustand vernachlässigt werden dürfen. So wird der Ansatz

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N) = \prod_{i=1}^{N} \psi(\mathbf{r}_i) \tag{2}$$

näherungsweise halten.
Benutzen Sie den Ansatz (2) um den Erwartungswert der Energie zu bauen, der als Funktional zu betrachten ist. Führen Sie dazu den Lagrange-Multiplikator ein, der mit der Normhaltung der Wellenfunktion assoziiert ist. Aus einem geeigneten Variationsprinzip, leiten Sie eine Gleichung für ψ her. Zusatz: Leiten Sie die entsprechende Zeitabhängige Gleichung her.

Aufgabe 8 (5 Punkte): *Fourier-Darstellung von Gittersystemen*

Sei Z die Zustandssumme eines Ising-Modells

$$Z = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det \beta J}} \int D[H] e^{-S_0} \prod_i [2\cosh(H_i + \beta h_i)]^{\frac{1}{2\beta}}, \tag{3}$$

mit $S_0 \equiv \frac{1}{2\beta} \sum_{i,j} H_i (J)^{-1}_{ij} H_j$. Für den Fall, dass sich die Spins auf einem d-dimensionalen Gitter mit Gitterkonstante a und Gitterplätzen $\mathbf{R}_i$ befinden

1. Zeigen Sie mit Hilfe der Fourierdarstellung $H_i = a^d \int \frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{R}_i \mathbf{k}} H(\mathbf{k})$, dass sich $S_0[H]$ als

   $$S_0 = \frac{a^d}{2\beta} \int \frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} H(\mathbf{k}) \frac{1}{J(\mathbf{k})} H(-\mathbf{k}) \tag{4}$$

   schreiben lässt.

2. Leite die explizite Form von $J(\mathbf{k})$ für nächste-Nachbar-Wechselwirkung her und zeige, dass sich für $a \to 0$ näherungsweise

   $$S_0 = \int d^d\mathbf{r} \left[\frac{1}{2} (\nabla \phi(\mathbf{r}))^2 + \frac{1}{2} r_0(T) (\phi(\mathbf{r}))^2 \right] \tag{5}$$

   ergibt, wobei $r_0(T)$ eine Funktion der Temperatur $T = \beta^{-1}$ ist und die Felder $\phi(\mathbf{r})$ proportional zu den Fourier-Rücktransformierten von $H(\mathbf{k})$ sind.

3. Diskutiere, wieso keine höheren Ableitungen von $\phi(\mathbf{r})$ in S_0 auftreten.