Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Javier Cerrillo

9. Übungsblatt – Statistische Mechanik

Abgabe: Mi. 04.02.2015 im Tutorium

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 15 (10 Punkte): *Bogoljubow-Transformation*

Der Hamilton-Operator des 1-D Quantum-Ising-Modell lautet nach einer Jordan-Wigner-Transformation und im Fourier-Raum

$$H = -gN + \sum_k \left\{ 2\left[g - J\cos(k2\pi/N)\right]\tilde{c}_k^\dagger \tilde{c}_k + J\sin(k2\pi/N)\left[\tilde{c}_k^\dagger \tilde{c}_{-k}^\dagger + \tilde{c}_{-k}\tilde{c}_k\right]\right\}, \tag{1}$$

wobei $k \in \left\{\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \dots\right\}$ im geraden Raum und $k \in \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots\}$ im ungeraden Raum. Da nur positive und negative Moden gekoppelt sind, kann man die folgende reduzierte Bogoljubow-Transformation einsetzen

$$\tilde{c}_k = u_{+k}\gamma_{+k} + v_{-k}^* \gamma_{-k}^\dagger. \tag{2}$$

1. Welche Gleichungen müssen u_k und v_k erfüllen, damit γ_k fermionische Operatoren bleiben.
2. Bei dieser Transformation sollen die nicht-diagonalen Terme verschwinden (solche wie $\gamma_k\gamma_{-k}$). Die Bedingung dafür lässt sich in der Form

   $$0 = (v_{-k}, u_{-k})\,\mathcal{M}\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} \tag{3}$$

   darstellen. Finden Sie die Matrix $\mathcal{M}$.
3. Berechnen Sie die Energien der freien Fermionen und schreiben Sie den diagonalisierten Hamiltonian.