

Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD

Dipl. Phys. Arash Azhand, Dr. Alexander Carmele, Dr. Julia Kabuß, Jan Totz, M.Sc.

10. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II**Abgabe: Mo. 12.01.2015 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude***Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.***Aufgabe 23 (10 Punkte): Bose-Einstein-Kondensation**

- (a) Diskutieren Sie mögliche Werte des chemischen Potentials für die Fermi-Dirac und die Bose-Einstein Statistik $f^{B/F}(\varepsilon, T, \mu)$. Plotten Sie die Verteilungen für verschiedene Temperaturen, dabei sei $\mu = \text{const.}$ Wie verändert sich die mittlere Teilchenzahl?
- (b) Betrachten Sie ein dreidimensionales Gas von Bosonen der Teilchenzahl \bar{N} . Diese läßt sich berechnen als

$$\bar{N} = \sum_{\mathbf{k}} f^B(\mathbf{k}).$$

\mathbf{k} ist der Wellenvektor der Teilchen. Es gilt die Dispersionsrelation $\varepsilon = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}$. Diese Summe läßt sich in ein Integral überführen. Zeigen Sie, dass sich für die Berechnung der Teilchendichte n das Integral

$$n = (2S + 1) \int_0^\infty f^B(\varepsilon) \mathcal{D}(\varepsilon) d\varepsilon$$

mit der dreidimensionalen Zustandsdichte, $\mathcal{D}(\varepsilon) = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon}$ ergibt.

- (c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus (a) die minimal mögliche Temperatur (bei $\mu = 0$). Diese ist die kritische Temperatur der Bose-Einstein-Kondensation T_c . Die mittlere Teilchenzahl \bar{N} ist konstant.
Hinweis: $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} dx \approx 2.612$.
- (d) Berechnen Sie für $T < T_c$ die Gasdichte $n'(T, T_c)$. Ergeben sich Widersprüche für ein angeschlossenes System und was bedeutet dies ?
- (e) Argumentieren Sie, warum bei sehr kleinen Temperaturen beim Übergang von der Summe zum Integral in (b) ein Fehler entsteht.
- (f) Machen Sie für die Gesamtteilchendichte n den Ansatz $n = n_{\text{cond}} + n'$ mit n_{cond} als der Dichte des Bose-Einstein-Kondensats. Erklären Sie, warum dieser Ansatz den gemachten Fehler korrigiert. Berechnen Sie den Anteil der kondensierten Materie $\frac{n_{\text{cond}}}{n}$.

Aufgabe 24 (10 Punkte): Planck'sche Strahlungsformel

Betrachten Sie ein Photonengas bei konstanter Temperatur in einem Kasten. Die mittlere Energie eines Photons ist $\epsilon(\mathbf{k}) = \hbar\omega(\mathbf{k}) = c\hbar k$. Außerdem gilt $\mu = 0$. Damit lautet die mittlere Besetzungszahl für Bosonen im Zustand \mathbf{k}, s : $\langle n_{\mathbf{k},s} \rangle = \frac{1}{\exp(\beta\hbar ck) - 1}$.

- (a) Im Zusammenhang mit diesem Problem treten häufig Integrale der Form $\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{\zeta^{-1}e^x - 1} dx$ auf. Lösen Sie dieses Integral allgemein, indem Sie die Γ -Funktion $\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha dx$ verwenden.
Hinweis: Verwenden Sie die geometrische Reihe. Es gilt weiterhin $\zeta e^{-x} < 1$.

Bitte Rückseite beachten! →

10. Übung TPV WS14/15

(b) Zeigen Sie, dass die innere Energie in der folgenden Form dargestellt werden kann:

$$U(T, V) = V \int_0^{\infty} u(\nu, T) d\nu$$

und geben Sie die spektrale Energiedichte $u(\nu, T)$ an. Diese Beziehung ist die Planck'sche Strahlungsverteilung.

Hinweis: Nutzen Sie die mittlere Besetzungszahl $\langle n_{\mathbf{k},s} \rangle$.

(c) Zeichnen Sie die Planck'sche Strahlungsverteilung $u(\nu)$ für verschiedene Temperaturen T . Diskutieren Sie den Einfluss von T !

(d) Leiten Sie das Stefan-Boltzmann-Gesetz $U(T, V)$ her, indem Sie die Integration aus Aufgabenteil (b) ausführen.

(e) Bestimmen Sie $\nu_{max}(T)$ bei dem $u(\nu, T)$ maximal ist (Wien'sches Verschiebungsgesetz).

Hinweis: Sie können die auftretende Gleichung numerisch lösen.

Vorlesung:

- Dienstags 8:15 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203.
- Donnerstags 8:15 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203.

Tutorien:

- Mi. 08–10 Uhr im EW 731
- Do. 10–12 Uhr im EW 229
- Do. 12–14 Uhr im EW 731
- Fr. 12–14 Uhr im EW 731.

Sprechzeiten:

- Do. 15–16 Uhr im EW 627 bei Arash Azhand
- Mi. 14–15 Uhr im EW 704 bei Alexander Carmele
- Fr. 14–15 Uhr im EW 703 bei Julia Kabuß
- Do. 15–16 Uhr im EW 627 bei Jan Totz

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.
- Bearbeitung und Vorstellung eines Projektes (Projektvorstellung in der letzten Vorlesungswoche).