Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD
Dipl. Phys. Arash Azhand, Dr. Alexander Carmele, Dr. Julia Kabuß, Jan Totz, M.Sc.

11. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Mo. 26.01.2015 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Bonusaufgabe 25 (12 Zusatzpunkte): *XY-Modell auf einem Ring*

Das XY-Modell beschreibt die Wechselwirkung mit Kopplungskonstante J zwischen den x- und y-Komponenten benachbarter Spins $\underline{S}_j = (S_j^{(x)}, S_j^{(y)}, S_j^{(z)})$. Wir betrachten N Spins in einem Ring. Ohne äußeres Feld und mit der Konvention $\underline{S}_{N+1} = \underline{S}_1$ (wobei $N > 0!$) lautet der Hamiltonoperator

$$(1) \qquad H_{XY} = -J \sum_{j=1}^{N} \left(S_j^{(x)} S_{j+1}^{(x)} + S_j^{(y)} S_{j+1}^{(y)} + S_j^{(x)} S_{j-1}^{(x)} + S_j^{(y)} S_{j-1}^{(y)} \right).$$

Wir führen eine Jordan-Wigner-Transformation durch.

a) Benutzen Sie $S_j^{\pm} = S_j^{(x)} \pm i S_j^{(y)}$, um den Hamiltonoperator zu schreiben als $H_{XY} = -J \sum_j \left(S_j^+ S_{j+1}^- + S_j^+ S_{j-1}^- \right)$. Wir führen die neuen Operatoren $d_j = e^{i\hat{\phi}_j} S_j^-$ und $d_j^+ = S_j^+ e^{-i\hat{\phi}_j}$ ein und wählen $\hat{\phi}_j = \pi \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{1}{2} + S_k^z\right)$, wobei wir $j > 0$ annehmen. Zeigen Sie, dass $\hat{\phi}_j = \pi \sum_{k=1}^{j-1} d_k^+ d_k$.

b) Zeigen Sie, dass d und d^+ fermionische Antivertauschungsrelationen erfüllen, dass also $\{d_j, d_k^+\} = \delta_{j,k}$ und $\{d_j, k_k\} = \{d_j^+, d_k^+\} = 0$. Vorgehensweise: Begründen Sie zunächst, dass $[S_j^{\pm}, \phi_j] = 0$. Daraus folgen die Antivertauschungsrelationen am gleichen Gitterplatz. Für verschiedene Gitterplätze benutzen wir z.B. das Hadamard-Lemma, um plausibel zu machen, dass $e^{\mp i\pi\hbar S_j^{(z)}} S_j^{\pm} e^{\pm i\pi\hbar S_j^{(z)}} = -S_j^{\pm}$.

c) Bringen Sie den Hamiltonoperator auf die Form $H_{XY} = -J \sum_j \left(d_j^+ d_{j+1} + d_j^+ d_{j-1} \right)$. Wir haben also das XY-Modell auf ein fermionisches Tight-Binding-Modell abgebildet. Wir wissen aus früheren Übungen, dass man es jetzt noch auf die diagonale Form $H_{XY} = -J \sum_k \gamma_k d_k^+ d_k$ bringen kann. Wie lautet dann γ_k?

Bonusaufgabe 26 (8 Zusatzpunkte): *Oszillator im elektrischen Feld*

Ein Teilchen der Masse m und Ladung e befinde sich in einem harmonischen Potenzial $\frac{m\omega^2 x^2}{2}$. Zusätzlich wird ein konstantes elektrisches Feld $\mathcal{E}$ in x-Richtung angelegt.

(a) Bestimmen Sie die exakten Energieeigenwerte des Problems durch quadratische Ergänzung.

(b) Zeigen Sie, dass in der zweiten Ordnung der nichtentarteten zeitunabhängigen Störungstheorie für einen Störoperator $\hat{V}$ gilt: $E_k^{(2)} = \sum_{n \neq k} \frac{\left|\langle k|\hat{V}|n\rangle\right|^2}{E_k - E_n}$.

(c) Betrachten Sie das elektrische Feld als Störung $\hat{V} = -e\mathcal{E}\hat{x}$ und berechnen Sie die Energie-Korrekturen aller Niveaus des harmonischen Oszillators in erster und zweiter Ordnung der zeitunabhängigen Störungstheorie. *Hinweis:* Stellen Sie die Störung durch die Leiteroperatoren dar und nutzen Sie deren Eigenschaften aus.