Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 30. Oktober 2014

Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD
Dipl. Phys. Arash Azhand, Dr. Alexander Carmele, Dr. Julia Kabuß, Jan Totz, M.Sc.

3. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Mo. 10.11.2014 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 7 (10 Punkte): *Operatoren in zweiter Quantisierung: Bosonische-Operatoren*

In der zweiten Quantisierung werden für das Schrödingerfeld

(1) $$\psi(\vec{r},t) = \sum_i \varphi_i(\vec{r}) b_i(t), \quad \psi^\dagger(\vec{r}) = \sum_i \varphi_i^*(\vec{r}) b_i^\dagger(t)$$

Vertauschungsrelationen eingeführt:

(2) $$[\psi(\vec{r},t), \psi^\dagger(\vec{r}',t)] = \delta(\vec{r}-\vec{r}') \quad \text{Bosonen,}$$

Im Heisenberg-Bild wird die Zeitabhängigkeit von $\psi(\vec{r},t)$ von den Operatoren $b_i^{(\dagger)}(t)$ getragen.

1. Zeigen Sie explizit durch Einsetzen, dass die jeweiligen Operatoren die bosonische Kommutatorrelation $[b_i, b_j^\dagger] = \delta_{i,j}$ erfüllen.
2. Für die Leiteroperatoren des quantenmechanischen harmonischen Oszillators wurde in der VL folgende Kommutatorrelation mit vollständiger Induktion bewiesen:

   (3) $$bb^{\dagger n} - b^{\dagger n} b = n b^{\dagger n-1} = \frac{\partial (b^{\dagger n})}{\partial b^\dagger}.$$

   Sei α eine komplexe Zahl. Zeigen Sie unter Verwendung von 1.) und Gleichung (3), dass für folgende Transformation des bosonischen Vernichters mit der e-Funktion gilt:

   (4) $$e^{-\alpha b^\dagger} b e^{\alpha b^\dagger} = b + \alpha.$$

3. Transformation von Operatoren ins Heisenberg-Bild: Für ein wechselwirkungsfreies bosonisches System ist der Hamiltonoperator durch $H_H = H_0 = \sum_i \hbar\omega_i b_i^\dagger b_i$ gegeben. Zeigen Sie unter Benutzung von 1), dass die Transformation eines Operators $b_i^{(\dagger)}(t) = U^\dagger b_i^{(\dagger)} U$ ins Heisenberg-Bild ergibt:

   (5) $$U^\dagger b_i U = e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H_0} b_i e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H_0} = e^{-i\omega_i(t-t_0)} b_i,$$

   (6) $$U^\dagger b_i^\dagger U = e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H_0} b_i^\dagger e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H_0} = e^{i\omega_i(t-t_0)} b_i^\dagger.$$

   Tipp: *Fassen Sie dazu die Transformation als $f(\alpha_i) \equiv U^\dagger b_i U$, wobei $\alpha_i = i\omega_i(t-t_0)$ und bilden Sie die Ableitung.*

Aufgabe 8 (10 Punkte): *Spin und Drehimpuls*

Der Spin eines Teilchens wird interpretiert als dessen innerer Drehimpuls. Wir machen uns das plausibel, indem wir folgende vier Relationen für die Spin-/Pauli-Matrizen beweisen, die wir vom Drehimpuls her kennen. Dabei verwenden wir die Pauli-Matrizen, die folgendermaßen aussehen:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Spin-Matrizen $\hat{S}_i$ sind über die Pauli-Matrizen definiert: $\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$.

3. Übung TPV WS14/15

(a) Zeigen Sie, dass $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$ (Summenkonvention!).

(b) Zeigen Sie, dass $[\sigma^2, \sigma_i] = 0\,\forall i \in \{1, 2, 3\}$.

Sei χ_{m_s} ein Spinor mit Spin $s = 1/2$ und der z-Komponente m_s des Spins. Wir verwenden den einfachsten Spinor:

$$\chi_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \chi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Zeigen Sie: $\hat{S}^2\chi_{m_s} = \hbar^2 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right)\chi_{m_s}$.

(d) Zeigen Sie: $\hat{S}_z\chi_{m_s} = \hbar m_s \chi_{m_s}$.