

Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD

Dr. Alexander Carmele, Dr. Julia Kabuß, Dr. Steffen Martens, Jan Tötz, M.Sc.

6. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II**Abgabe: Mo. 01.12.2014 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude***Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.***Aufgabe 14 (6 Punkte): Erwartungswert eines 2-Teilchenoperators**Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert $\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$ eines fermionischen 2-Teilchenoperators gilt:

$$\langle \psi | a_{\lambda'}^{\dagger} a_{\mu'}^{\dagger} a_{\mu} a_{\lambda} | \psi \rangle = \langle a_{\mu'}^{\dagger} a_{\mu} \rangle \delta_{\mu' \mu} \langle a_{\lambda'}^{\dagger} a_{\lambda} \rangle \delta_{\lambda' \lambda} - \langle a_{\mu'}^{\dagger} a_{\lambda} \rangle \delta_{\mu' \lambda} \langle a_{\lambda'}^{\dagger} a_{\mu} \rangle \delta_{\lambda' \mu}.$$

wobei für die Wellenfunktion gilt: $|\psi\rangle = \prod_{\beta} \left(a_{\beta}^{\dagger}\right)^{n_{\beta}} (-1)^{N_{\beta}} |0\rangle$ mit $n_{\beta} = 0, 1$ und $N_{\beta} = \sum_{\alpha=1}^{\beta-1} n_{\alpha}$.**Aufgabe 15 (14 Punkte): Plasmonen**

- (a) Stellen Sie die Heisenberg-Bewegungsgleichung für $\langle a_{\mathbf{k}-\mathbf{Q},s}^{\dagger} a_{\mathbf{k},s} \rangle$ auf. Nutzen Sie dazu den Elektronengas-Hamiltonian in 2. Quantisierung:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k},s} \epsilon_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{k},s}^{\dagger} a_{\mathbf{k},s} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{q}, s_1, s_2} V_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q},s_1}^{\dagger} a_{\mathbf{k}_2-\mathbf{q},s_2}^{\dagger} a_{\mathbf{k}_2,s_2} a_{\mathbf{k}_1,s_1}.$$

- (b) Um das auftretende Hierarchieproblem (berechnete Erwartungswerte $\langle a^{\dagger} a \rangle$ koppeln an höhere Erwartungswerte $\langle a^{\dagger} a^{\dagger} a a \rangle$) zu lösen, führen Sie eine Hartree-Fock-Faktorisierung der 4er-Erwartungswerte durch.
- (c) Vernachlässigen Sie zusätzlich Spinkohärenzen ($\delta_{s,\lambda}$) und nehmen Sie nur Erwartungswerte mit, die elektronische Dichten ($\sigma_{\mathbf{k},\mathbf{k}}^{ss} := \langle a_{\mathbf{k},s}^{\dagger} a_{\mathbf{k},s} \rangle$) und deren räumliche Fluktuationen ($\sigma_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}}^{ss} := \langle a_{\mathbf{k}-\mathbf{q},s}^{\dagger} a_{\mathbf{k},s} \rangle$) beschreiben. Damit erhält man folgende Bewegungsgleichung:

$$-i\hbar\partial_t \sigma_{\mathbf{k}-\mathbf{Q},\mathbf{k}}^{ss} = (\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{Q},s} - \epsilon_{\mathbf{k},s}) \sigma_{\mathbf{k}-\mathbf{Q},\mathbf{k}}^{ss} + V_{\mathbf{Q}} (\sigma_{\mathbf{k},\mathbf{k}}^{ss} - \sigma_{\mathbf{k}-\mathbf{Q},\mathbf{k}-\mathbf{Q}}^{ss}) \sum_{\mathbf{k}_2,s'} \sigma_{\mathbf{k}_2-\mathbf{Q},\mathbf{k}_2}^{s's'} \\ + \sum_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}} (\sigma_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{ss} - \sigma_{\mathbf{k}-\mathbf{Q}+\mathbf{q},\mathbf{k}-\mathbf{Q}+\mathbf{q}}^{ss}) \sigma_{\mathbf{k}-\mathbf{Q},\mathbf{k}}^{ss}.$$

Deuten Sie die einzelnen Terme.

- (d) Die Bewegungsgleichung aus (c) kann im Fourierraum analytisch gelöst werden:

$$1 = \frac{2V_{\mathbf{q}}}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}} \frac{f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - f_{\mathbf{k}}}{\omega_{\text{Pl}}(\mathbf{q}) + \hbar^{-1}(\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}})},$$

wobei es sich bei $f_{\mathbf{m}}$ um die elektronische Dichte und bei $\tilde{\epsilon}$ um die renormalisierte Einteilchenenergie handelt. Um sich dieses Ergebnis zu veranschaulichen, plotten Sie die rechte Seite der Bestimmungsgleichung für einen beliebigen aber festen Wert \mathbf{q} in Abhängigkeit von ω_{Pl} . Nehmen Sie dazu den eindimensionalen Spezialfall an. Zusätzlich soll es sich im Nenner um die freien Teilchenenergien handeln ($\tilde{\epsilon}_k = \epsilon_k$). Was bedeutet es also, die transzendente Gleichung zu lösen und welche Lösung ist die kollektive Schwingungsmode?

6. Übung TPV WS14/15

Vorlesung:

- Dienstags 8:15 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203.
- Donnerstags 8:15 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203.

Tutorien:

- Mi. 08–10 Uhr im EW 731
- Do. 10–12 Uhr im EW 229
- Do. 12–14 Uhr im EW 731
- Fr. 12–14 Uhr im EW 731.

Sprechzeiten:

- Mi. 14–15 Uhr im EW 704 bei Alexander Carmele
- Fr. 14–15 Uhr im EW 703 bei Julia Kabuß
- Do. 15–16 Uhr im EW 737 bei Steffen Martens
- Do. 15–16 Uhr im EW 627 bei Jan Tötz

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.
- Bearbeitung und Vorstellung eines Projektes (Projektvorstellung in der letzten Vorlesungswoche).