VL: Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD
UE: Dipl. Phys. Arash Azhand, Dr. Alexander Carmele, Dr. Julia Kabuß, Dr. Steffen Martens, Jan F. Totz, M.Sc., Dr. Anna Zakharova

Projekte zur Quantenmechanik II

Durchführung

Die Projekte stellen Aufgaben aus aktuellen Forschungsfeldern der Quantenmechanik dar und können nach eigenen Vorstellungen bearbeitet werden (Numerik, Analytik, Zusammenfassung der Literatur . . .). Die in jeder Projektbeschreibung aufgeführten Punkte können als Leitfaden dienen, Sie können aber auch in Absprache mit den BetreuerInnen eigene Ideen verfolgen.
Die Projekte sind so konzipiert, dass die Bearbeitung mit der angegebenen Literatur und dem Wissen aus der Vorlesung möglich ist. Bei einigen Projekten werden allerdings besondere Vorkenntnisse benötigt (z.B. Mathematica, Python).
Zur vollständigen Bearbeitung gehören folgende Punkte:

1. Bearbeitung des Projekts in Gruppen von 3-5 Studierenden.

2. Präsentation der Ergebnisse in einem 15 minütigen Kurzvortrag (+ 5 Minuten Diskussion) in der letzten Vorlesungswoche. Wichtig ist hierbei in erster Linie die verständliche Darstellung. Beschränken Sie sich deshalb auf die zum Verständnis wesentlichen Punkte.

3. Abgabe einer schriftlichen Ausarbeitung mit vollständiger Dokumentation der Lösungswege und vollständigen Quellenangaben bis zum 13.02.2015. Auch hier steht die Verständlichkeit und übersichtliche Darstellung im Vordergrund. Der Umfang der Ausarbeitung soll fünf bis zehn Seiten umfassen.

Während der gesamten Bearbeitungszeit stehen Ihnen die BetreuerInnen des jeweiligen Projektes für Fragen zur Verfügung. Bitte machen Sie individuell Termine mit den Betreuenden aus.

Projekt 1: *Chimera-Zustände in supraleitenden Metamaterialien*

Betreuer: Jan F. Totz, Anna Zakharova

Chimera-Zustände existieren auf Netzwerken identischer Oszillatoren mit nichtlokaler Kopplung und sind durch die räumliche Koexistenz von Bereichen mit kohärenten (synchronisierten) und inkohärenten (desynchronisierten) Oszillatoren charakterisiert [1, 2, 3, 4]. Sie wurden erst vor wenigen Jahren experimentell in unterschiedlichen physikalischen und chemischen Systemen gefunden [5, 6]. Vor kurzem wurde ein weiteres physikalisches System vorgestellt, in dem diese Zustände natürlich auftreten sollen: SQUID(Superconducting Quantum Interference Device)-Metamaterialien [7], welche in moderner Sensortechnologie Anwendung finden.
Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema mit der angegebenen Literatur und den in ihnen enthaltenen weiterführenden Referenzen durch.
- Wie lassen sich Chimera-Zustände quantitativ beschreiben?
- Recherchieren Sie alle bisherigen Experimente zu Chimera-Zuständen und stellen Sie drei von diesen vor. Gehen Sie dabei auf die jeweilige Stärken und Schwächen ein und vergleichen Sie diese.
- Stellen Sie das Modell zur Beschreibung des SQUID vor und beschreiben Sie es im Detail.
- Untersuchen Sie Chimera-Zustände im SQUID-Modell numerisch.

Literatur

[1] Y. Kuramoto and D. Battogtokh: *Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators*, Nonlinear Phenom. Complex Syst. **4**, 380 (2002).

[2] D. M. Abrams and S. H. Strogatz: *Chimera states for coupled oscillators*, Phys. Rev. Lett. **93**, 174102 (2004).

[3] M. J. Panaggio and D. M. Abrams: *Chimera states: Coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators*, arXiv: 1403.6204 (2014).

[4] A. Zakharova, M. Kapeller, and E. Schöll: *Chimera death: Symmetry breaking in dynamical networks*, Phys. Rev. Lett. **112**, 154101 (2014).

[5] A. M. Hagerstrom, T. E. Murphy, R. Roy, P. Hövel, I. Omelchenko, and E. Schöll: *Experimental observation of chimeras in coupled-map lattices*, Nat. Phys. **8**, 658 (2012).

[6] M. R. Tinsley, S. Nkomo, and K. Showalter: *Chimera and phase-cluster states in populations of coupled chemical oscillators*, Nat. Phys. **8**, 662 (2012).

[7] N. Lazarides, G. Neofotistos, and G. P. Tsironis: *Chimeras in SQUID metamaterials*, arXiv: 1408.6072 (2014).

Projekt 2: *Quanten-Chimera-Zustände in Spin-Systemen*

Betreuer: Anna Zakharova, Eckehard Schöll

Klassische Chimera-Zustände existieren auf Netzwerken identischer Oszillatoren mit nichtlokaler Kopplung und sind durch die räumliche Koexistenz von Bereichen mit kohärenten (synchronisierten) und inkohärenten (desynchronisierten) Oszillatoren charakterisiert. Während ursprünglich nur die Phasendynamik betrachtet wurde [1, 2, 3], wurden in neuester Zeit auch Amplituden-Chimeras untersucht [4]. Chimera-Zustände wurden erst vor wenigen Jahren experimentell in unterschiedlichen physikalischen und chemischen Systemen gefunden, z.B. [5, 6]. Als quantenmechanisches Analogon dieser Chimera-Zustände wurde kürzlich ein Spin-System vorgeschlagen [7], in dem sich das Chimera-Verhalten durch quantenmechanische Verschränkung zwischen den Spins einer Kette zeigt.
Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema mit der angegebenen Literatur und den in ihnen enthaltenen weiterführenden Referenzen durch.
- Diskutieren Sie die Analogie und die Unterschiede des Spinsystems zu einem Ring von klassischen Phasenoszillatoren.
- Erklären Sie den Begriff der quantenmechanischen Verschränktheit.
- Beschreiben Sie klassische Phasen- und Amplituden-Chimeras und stellen Sie die Quanten-Chimera-Zustände und ihren Bezug zu Quantenchaos, Quantenunordnung und Verschränktheit dar.
- Untersuchen Sie Chimera-Zustände im Spin-System numerisch.

Literatur

[1] Y. Kuramoto and D. Battogtokh: *Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators*, Nonlinear Phenom. Complex Syst. **4**, 380 (2002).

[2] D. M. Abrams and S. H. Strogatz: *Chimera states for coupled oscillators*, Phys. Rev. Lett. **93**, 174102 (2004).

[3] M. J. Panaggio and D. M. Abrams: *Chimera states: Coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators*, arXiv: 1403.6204 (2014).

[4] A. Zakharova, M. Kapeller, and E. Schöll: *Chimera death: Symmetry breaking in dynamical networks*, Phys. Rev. Lett. **112**, 154101 (2014).

[5] A. M. Hagerstrom, T. E. Murphy, R. Roy, P. Hövel, I. Omelchenko, and E. Schöll: *Experimental observation of chimeras in coupled-map lattices*, Nat. Phys. **8**, 658 (2012).

[6] M. R. Tinsley, S. Nkomo, and K. Showalter: *Chimera and phase-cluster states in populations of coupled chemical oscillators*, Nat. Phys. **8**, 662 (2012).

[7] D. Viennot and L. Aubourg: *Quantum chimera states*, arXiv: 1408.4585v2 (2014).

Projekt 3: *Quantenphasenübergänge und Floquet-Theorie in getriebenen Quantensystemen im Nichtgleichgewicht*

Betreuer: Jan F. Totz, Anna Zakharova

Klassische Phasenübergänge basieren auf thermischen Fluktuationen und lassen sich charakterisieren durch langreichweitge räumliche Korrelationen, wenn das betrachtete System sich dem kritischen Punkt nähert. Insbesondere lassen sich universelle Skalierungsgesetze für die beteiligten physikalischen Observablen aufstellen. Was passiert allerdings für Systeme nah am absoluten Nullpunkt? Ohne thermische Fluktuationen, treten Quantenfluktuationen in den Vordergrund, die die das System treiben und zu neuen Quantenphasenübergängen [1, 2, 3] führen. Allerdings ist in einem getriebenen quantenmechanischen System die Gesamtenergie nicht erhalten; es kann insofern nicht mit einem herkömmlichen Hamilton-Operator beschrieben werden. Stattdessen wird die aus der nichtlinearen Dynamik bekannte Floquet-Theorie angewendet, um einen effektiven Hamiltonian aufzustellen, der eine passende zeitliche Periodizität aufweist.
Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema mit der angegebenen Literatur und den in ihnen enthaltenen weiterführenden Referenzen durch.
- Arbeiten Sie sich in die Floquet-Theorie aus der nichtlinearen Dynamik ein.
- Vollziehen Sie die Rechnungen in [4, 5] nach und stellen Sie den effektiven Hamiltonian eines getriebenen quantenmechanischen Systems (Ising-, Dicke- oder Lipkin-Meshkov-Glick Model) auf und berechnen Sie die zugehörigen Eigenenergien.

Literatur

[1] V. Bastidas, C. Emary, B. Regler, and T. Brandes: *Nonequilibrium quantum phase transitions in the dicke model*, Phys. Rev. Lett. **108**, 043003 (2012).

[2] V. Bastidas, C. Emary, G. Schaller, and T. Brandes: *Nonequilibrium quantum phase transitions in the Ising model*, Phys. Rev. A **86**, 063627 (2012).

[3] V. M. Bastidas, C. Emary, G. Schaller, A. Gómez-León, G. Platero, and T. Brandes: *Floquet topological quantum phase transitions in the transverse Wen-plaquette model*, arXiv: 1302.0781 (2013).

[4] G. Engelhardt: *The periodically driven Lipkin-Meshkov-Glick model*, BSc, TU Berlin, Berlin (2012).

[5] V. M. Bastidas Valencia: *AC-driven Quantum Phase Transitions*, PhD, TU Berlin, Berlin (2013).

Projekt 4: *Zeitverzögerte Rückkopplung zur Kontrolle von Quantensystemen*

Betreuer: Jan F. Totz

Zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle ist eine etablierte Methode zur Steuerung klassischer nichtlinearer Systeme [1]. Beispielsweise lassen sich die unterschiedlichen instabilen periodischen Orbits eines chaotischen Systems stabilisieren, wenn die Verzögerungszeit gleich der zeitlichen Periode des instabilen Orbits gewählt wird, und die Stabilität von Fixpunkten lässt sich umkehren und neue stabile Grenzzyklen können generiert werden. Die Implementation dieser Kontrolle auf quantenmechanische Systeme ist ein junges Feld. Das in der Quantenmechanik zur Modellierung von Superradianz verwendete dissipative Dicke-Model lässt sich durch semiklassische dynamische Gleichungen beschreiben, wodurch es zum idealen Kandidaten wird, um den Einfluss von zeitverzögerter Rückkopplung zu untersuchen. Es wurde kürzlich gezeigt, dass die Rückkopplung neue stationäre und oszillierende Nichtgleichgewichtsphasen erzeugen kann [2].
Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema mit der angegebenen Literatur und den in ihnen enthaltenen weiterführenden Referenzen durch.
- Arbeiten Sie sich in die Theorie der Pyragas-Kontrolle ein und stellen Sie diese am Beispiel eines klassischen nichtlinearen Problems vor.
- Vollziehen Sie die Rechnungen in [2] nach. Erklären Sie das Auftreten von Fixpunkten und Grenzzyklen. Unter welchen Bedingungen lässt sich das vorgestellte Kontrollschema anwenden?

Literatur

[1] E. Schöll and H. G. Schuster: *Handbook of Chaos Control* (John Wiley & Sons, 2008).

[2] W. Kopylov, C. Emary, E. Schöll, and T. Brandes: *Time-delayed feedback control of the Dicke-Hepp-Lieb superradiant quantum phase transition*, New J. Phys. (2014), in print, arXiv 1403.0620.

Projekt 5: *Projektionsoperatormethode für offene Quantensysteme: Strahlungs-Zerfall*

Betreuer: Julia Kabuß

In offenen Quantensystemen ist man oftmals nur an der Dynamik weniger Systemfreiheitsgrade interessiert und weniger an der tatsächlichen Entwicklung von deren Umgebung. In diesem Sinne ist es daher von Vorteil, das System auf eben diese Freiheitsgrade von Interesse zu reduzieren, ohne jedoch nicht-Markovsche Effekte resultierend aus der Wechselwirkung mit der Umgebung zu verlieren. Eine vielfach angewendete Methode ist die Time-Convolutionless (TCL) Projektionsoperatormethode, wobei die systemrelevante Dynamik mithilfe einer Mastergleichung 1. Ordnung mit zeitlokalem TCL-Generator beschrieben werden kann.
Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Leiten Sie zunächst mithilfe der angegebenen Literatur [1] die Nakajima-Zwanzig-Gleichung sowie die TCL-Mastergleichung her und diskutieren Sie die Unterschiede.

- Führen Sie nun eine Störungsrechung 2. Ordnung für die TCL-Generatoren druch und schreiben Sie die resultierende Mastergleichung hin.

- Betrachten Sie nun ein System bestehend aus einem relevanten Anteil, nämlich einer einzelnen quantisierten optischen Resonatormode (Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $c^\dagger, c$) und dem Reservoiranteil, einem strukturierten Kontinuum von Photon-Moden (Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $d_k^\dagger, d_k$).

$$H_0 = \hbar\omega c^\dagger c + \hbar \sum_k \omega_k d_k^\dagger d_k, \tag{1}$$

$$H_{WW} = \hbar \sum_k (g_k c^\dagger d_k + g_k^* d_k^\dagger c) \quad \text{mit} \quad g_k \equiv g \sin(kL) \tag{2}$$

  wobei ω, ω_k die Frequenzen der quantisierten optischen Mode bzw. der Reservoirmoden, g_k die Kopplungstärke der Resonatormode an die Reservoirmoden mit Wellenzahlen k sind. L ist die Entfernung eines Spiegels außerhalb des Resonators, welcher das Reservoir strukturiert. Gehen Sie ins Wechselwirkungsbild und wenden Sie für dieses System nun die genäherte TCL-Gleichung an. Geben Sie die resultierende Differentialgleichung für die Dichtematrix an.

- Betrachten Sie die Dynamik der Diagonalterme, diskutieren und interpretieren Sie das zu erwartende Verhalten.

Literatur

[1] H.-P. Breuer and F. Petruccione: *The Theory of Open Quantum Systems* (OUP Oxford, 2007).

Projekt 6: *Quantenpunkt-Phononlaser – Semiklassische Theorie*

Betreuer: Julia Kabuß

Aufgrund von neuen technologischen Möglichkeiten im Bereich der Nanophononik und Nanomechanik, die es ermöglichen, einzelne akustische Phonon- oder Oszillatormoden (Phonon Cavities) einzuschließen, gibt es verschiedene Möglichkeiten der Realisierung eines sogenannten Phononlasers [1, 2, 3]. Dabei sollen analog zu einem optischen Laser ein oder mehrere Emitter an eine akustische Phononmode gekoppelt werden und dieses System durch externes Pumpen in den Phononlaserbetrieb versetzt werden.
Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Führen Sie eine Literatur- und Internetrecherche zu diesem Thema durch.
- Der Hamiltonian für den Quantenpunkt(QP)-Phononlaser ist gegeben durch:

$$\mathcal{H}_0(t) = \frac{\hbar\Delta}{2}\sigma_z + \hbar\omega_{ph} b^\dagger b, \quad (1)$$

$$\mathcal{H}_I = \Omega(t)\sigma_x + g\sigma_+\sigma_-(b^\dagger + b), \quad (2)$$

  wobei $b, b^\dagger$ die phononischen Leiteroperatoren sind, $\Delta = \omega_c - \omega_v - \omega_l$, $\omega_{cv} = \omega_c - \omega_v$ die optische Übergangsfrequenz des QP, ω_l die Laserfrequenz, ω_{ph} die Frequenz der akustischen Phononmode, g die Kopplungsstärke des Emitters an die akustische Phononmode, $\Omega(t) = \Omega\, e^{i\omega_l t}$ die Kopplung and das externe Laserfeld und $\sigma_z \equiv |c\rangle\langle c| - |v\rangle\langle v|$, $\sigma_x \equiv |v\rangle\langle c| + |c\rangle\langle v|$, $\sigma_- \equiv |v\rangle\langle c|$, $\sigma_+ \equiv |c\rangle\langle v|$ die Paulioperatoren sind. Gleichung (1) beschreibt das ungestörte elektronische sowie das phononische System. Gleichung (2) beschreibt zum einen die optische Anregung durch den externen Laser (1. Term), zum anderen die Wechselwirkung zwischen Quantenpunkt und Phononmode (2. Term). Leiten Sie nun basierend auf der Vorgehensweise in Ref [4] ein effektives Modell für den Phononlaser her. Nehmen Sie dabei an, dass das System mit einer Laserfrequenz von etwa $\omega_l \approx \omega_{cv} + \omega_{ph}$ angeregt wird.
- Benutzen Sie nun den neuen Effektivhamiltonian, um mithife der Heisenberg-Bewegungsgleichung die Gleichungen für die komplexe Phononamplitude $\langle b\rangle$, die Polarisation $\langle|c\rangle\langle v|\rangle$ und die Inversion $\langle|c\rangle\langle c|\rangle - \langle|v\rangle\langle v|\rangle$ herzuleiten.
- Führen Sie eine semiklassische Näherung durch und lösen sie das resultierende Gleichungssystem, um einen Ausdruck für die Phononzahl zu bekommen. Diskutieren Sie das Ergebnis und führen Sie eine graphische Auswertung durch.

Literatur

[1] K. Vahala, M. Herrmann, S. Knünz, V. Batteiger, G. Saathoff, T. W. Hänsch, and T. Udem: *A phonon laser*, Nat. Phys. **5**, 682 (2009).

[2] K. Kepesidis, S. Bennett, S. Portolan, M. Lukin, and P. Rabl: *Phonon cooling and lasing with nitrogen-vacancy centers in diamond*, Phys. Rev. B **88**, 064105 (2013).

[3] J. Kabuß, A. Carmele, T. Brandes, and A. Knorr: *Optically driven quantum dots as source of coherent cavity phonons: A proposal for a phonon laser scheme*, Phys. Rev. Lett. **109**, 054301 (2012).

[4] J. Kabuß, A. Carmele, and A. Knorr: *Threshold behavior and operating regimes of an optically driven phonon laser: Semiclassical theory*, Phys. Rev. B **88**, 064305 (2013).

Projekt 7: *Jaynes-Cummings-Modell*

Betreuer: Julia Kabuß/Alexander Carmele

Das Jaynes-Cumming-Modell (JCM) ist ein grundlegendes Modell der Quantenoptik und beschreibt [1] die verlustfreie Wechselwirkung zwischen einem 2-Niveau-System mit einer einzelnen quantisierten Lichmode. Trotz der Einfachheit dieses Systems weist es viele interessante Eigenschaften auf, wie z.B. Vakuum-Rabi-splitting oder die berühmte Collapse- and Revival-Dynamik im Falle eines starken Cavity-Feldes im Glauberzustand. Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Der JCM-Hamiltian ist gegeben durch:

$$H_0 = \hbar \sum_{i=b,a} \omega_i |i\rangle\langle i| + \hbar\omega c^\dagger c, \tag{1}$$

$$H_{WW} = \hbar g |b\rangle\langle a| c^\dagger + H.c.. \tag{2}$$

  wobei der Grundzustand des elektronischen Systems konventionellerweise mit b und der angeregte Zustand mit a indiziert werden. $\omega_{ab} = \omega_a - \omega_b$ ist demnach die Übergangsfrequenz des 2-Niveausystems, ω die Frequenz des optischen Resonators und g die Kopplungsstärke zwischen dem 2-Niveausystem und der Resonatormode. Stellen Sie nun das elektronische und photonische System im ungestörten Fall [also ohne Gleichung (2)] schematisch dar.

- Wie oben erwähnt, handelt es sich beim JCM um ein verlustfreies System und damit um ein System im Regime der starken Kopplung. Dies führt zu einer Hybridisierung der beiden Teilsysteme. Bringen Sie also den Hamiltonian auf Diagonalform, bestimmen Sie die neuen Eigenwerte, wie die neuen Systemzustände, die sogenannten *dressed states* [2]. Stellen Sie das wechselwirkende System nun ebenfalls schematisch dar und diskutieren Sie das Ergebnis.

- Stellen Sie mithilfe von Gleichungen (1) und (2) und der Schrödingergleichung die Koeffizientengleichungen auf und lösen Sie diese für die Anfangsbedingung, dass sich das Elektron im Zustand $|a\rangle$ befindet. Das photonische System befinde sich in einem beliebigen Anfangszustand. Geben Sie hiermit die Lösung für die Inversion des Emitters sowie die Besetzungswahrscheinlichkeit einer beliebigen Anzahl von Photonen an.

- Berechnen Sie die Dynamik nun für verschiedene Lichstatistiken der Photonmode, und zwar:

  a) Fock-Zustand
  b) thermischer Zustand
  c) kohärenter Zustand

  und werten Sie die Ergebnisse graphisch aus und diskutieren Sie die Dynamik.

Literatur

[1] M. O. Scully: *Quantum Optics* (Cambridge University Press, 1997).

[2] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg: *Atom-photon interactions: basic processes and applications* (J. Wiley, 1992).

Projekt 8: *Quantenstatistische Zustände des elektromagnetischen Feldes*

Betreuer: Alexander Carmele

Das quantisierte elektromagnetische Feld besitzt verschiedene statistische Zustände [1]. Ziel dieses Projektes ist es, die in der Natur bislang entdeckten Lichtsorten kennenzulernen und quantenstatistisch zu erfassen [2]. Grundlegend hierfür ist die Intensität und Intensitätskorrelation, die in diesem Projekt auf verschiedene Weisen analytisch berechnet werden [3].
Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Führen Sie eine Literatur- und Internetrecherche zu diesem Thema durch.
- Beschreiben Sie das für die Photonstatistik bahnbrechende Experiment von Hanbury-Brown und Twiss.
- Berechnen Sie die Besetzungszahl für Fock-, thermische und kohärente Photonen.
- Berechnen Sie die Intensitäts-Intensitäts-Korrelation für Fock-, thermische und kohärente Photonen, die sogenannte $g^{(2)}(t)$-Funktion.
- Drücken Sie den statistischen Operator (in Besetzungswahrscheinlichkeiten entwickelt) allgemein für die drei verschiedenen Lichtsorten aus.
- Plotten Sie die Besetzungswahrscheinlichkeiten für die drei Felder für jeweils einen festen Intensitätsmittelwert.
- Diskutieren Sie die unterschiedlichen Verteilungen.

Literatur

[1] S. M. Barnett and P. M. Radmore: *Methods in Theoretical Quantum Optics* (Clarendon Press, 1997).

[2] R. Glauber: *Coherent and incoherent states of the radiation field*, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963).

[3] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss: *A test of a new type of stellar interferometer on sirius*, Nature **178**, 1046 (1956).

Projekt 9: *Das Independent Boson Modell*

Betreuer: Alexander Carmele

Vielteilchen-Wechselwirkungen führen zu dem sogenannten Hierarchieproblem, d.h. das Gleichungssystem schließt nicht mehr. In diesem Projekt wird ein besonders wichtiges Beispiel dafür nachgerechnet, daß unter bestimmten Annahmen Vielteilchenprobleme exakt gelöst werden können: das Independent Boson Modell für die Elektron-Phonon Wechselwirkung [1]:

$$H = \hbar\omega_c a_c^\dagger a_c + \hbar\omega_v a_v^\dagger a_v + \hbar \sum_q \omega_q b_q^\dagger b_q + \hbar \sum_{q,i=v,c} g_q^{ii} a_i^\dagger a_i (b_q^\dagger + b_q), \tag{3}$$

wobei ein Zwei-Niveau-System (ZNS) mit einem Valenzbandzustand (v) und Leitungsbandzustand (c) und zugehörigen fermionischen Erzeuger- $(a^\dagger)$ und Vernichter-Operatoren (a) angenommen wird. Dieses ZNS mit Bandlückenenergie $\hbar\omega_0 = \hbar(\omega_c - \omega_v)$ koppelt an ein bosonisches Bad mit Erzeuger- und Vernichteroperatoren $(b_q^\dagger, b_q)$ über das Matrixelement (g_q^{ii}), abhängig von der entsprechenden Wellenzahl q.

- Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die mikroskopische Polarisation $p(t)e^{-i\omega_0 t} = \langle a_v^\dagger(t) a_c(t)\rangle e^{-i\omega_0 t}$ auf und machen Sie sich das Hierarchieproblem klar.
- Eine formale Lösung für die Polarisation ist durch $p(t) = p(t_0) + i\int_{t_0}^t \mathrm{d}t_1 \phi(t_1) p(t_1)$ gegeben. Zeigen Sie dies durch Ableitung dieser Gleichung und identifizieren Sie $\phi(t_1)$.
- Benutzen Sie für die unbekannte Funktion $p(t_1)$ die formale Lösung der Polarisation für $p(t)$ und entwickeln Sie eine Störungstheorie bis zur dritten Ordnung in ϕ.
- Zeigen Sie für ein skalares ϕ, daß die Lösung für die Polarisation wie folgt lautet: $p(t) = p(t_0)\exp[i\int_{t_0}^t \phi(t')\mathrm{d}t']$. Was ändert sich, wenn ϕ operatorwertig ist?
- Nimmt man an, daß die Phononen und Elektronen vor t_0 nicht wechselwirken (Gleichgewichtsannahme), und die Phononen als Bad wirken, so gilt das Wicksche Theorem: $p(t) = p(t_0)\exp[-(1/2)\int_{t_0}^t\int_{t_0}^t \langle T\phi(t_1)\phi(t_2)\rangle\, \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2]$, wobei T der Zeitordnungsoperator ist. Rechnen Sie $\langle T\phi(t_1)\phi(t_2)\rangle$ aus.
- Nutzen Sie nun die Badannahme, indem sie zur Berechnung des Erwartungswertes folgenden statistischen Operator ansetzen: $\rho_b = Z^{-1}\exp[-\beta\sum_q \hbar\omega_q b_q^\dagger b_q]$. Nehmen Sie als Dispersionsrelation $\omega(q) = \omega_{LO}$ an, dann lautet die Lösung:

  $$p(t) = p(t_0)\exp\left[\sum_q \frac{|g_q^{vv} - g_c^{cc}|^2}{\hbar^2\omega_{LO}^2}\left((n_q+1)(\exp(-i\omega_{LO}t) - 1) + n_q(\exp(i\omega_{LO}t) - 1)\right)\right]$$

  Plotten Sie das Ergebnis mit $p(t_0) = 0.1, \omega_{LO} = 36\text{meV}, T = 10\text{K}, \sum_q |g_q^{vv} - g_c^{cc}|^2 = 1.8\cdot 10^{-5}\text{fs}^{-2}$.

Literatur

[1] V. May and O. Kühn: *Charge and Energy Transfer Dynamics in Molecular Systems* (Wiley-VCH, 2004).

Projekt 10: *Von den Halbleiter-Blochgleichungen zur Boltzmanngleichung*

Betreuer: Alexander Carmele, Eckehard Schöll

Es gibt eine Hierarchie von Transportgleichungen zwischen der mikroskopisch-quantenmechanischen und der makroskopisch-klassischen Beschreibungsebene [1]. Ziel dieses Projektes ist es, aus der voll quantenkinetischen Dichtematrix-Theorie (Halbleiter-Blochgleichungen) die semiklassische Boltzmanngleichung abzuleiten.

Die Wechselwirkung von Ladungsträgern im Halbleiter mit einer klassischen Lichtquelle kann im Rahmen der Dichtematrixtheorie mit den Halbleiter-Blochgleichungen beschrieben werden:

$$\frac{d}{dt} f_{e,h}(k,t) = \frac{1}{i\hbar} \underline{\mu} \cdot \underline{\mathcal{E}}(t)[p^*(k,t) - p(k,t)] \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} p(k,t) = \frac{1}{i} \omega_p(k) p(k,t) + \frac{1}{i\hbar} \underline{\mu} \cdot \underline{\mathcal{E}}(t)[1 - f_e(k,t) - f_h(k,t)] \quad (5)$$

Hier sind f_e und f_h die Verteilungsfunktionen der Elektronen und Löcher und p die mikroskopische Polarisation, abhängig von der Zeit t und der Wellenzahl k. Das System koppelt mit dem elektrischen Dipolmatrixelement $\underline{\mu}$ an das externe elektrische Feld $\underline{\mathcal{E}}(t) = \underline{\mathcal{E}}_0(t) e^{i\omega t} + \text{c.c.}$, und $\omega_p = \frac{E_n - E_{n_0}}{\hbar}$ ist die elektronische Übergangsfrequenz.

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch.
- Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung (5) mit einer Green'schen Funktion und setzen Sie das Ergebnis

$$p(k,t) = \int_{t_0}^{t} e^{-i\omega_p(t-t')} \frac{1}{i\hbar} \underline{\mu} \cdot \underline{\mathcal{E}}(t') \left[1 - f_e(k,t') - f_h(k,t')\right] dt' \quad (6)$$

  in Gleichung (4) ein. Dadurch eliminieren Sie die Polarisation und erhalten eine geschlossene Integro-Differentialgleichung für f_e und f_h, die schwer zu lösen ist.
- Nehmen Sie nun an, dass sowohl die Amplitude des elektrischen Feldes $\underline{\mathcal{E}}_0(t)$ als auch die Besetzung $f_{e,h}(k,t)$ viel langsamer variieren als die oszillierenden Terme, so dass wir im Argument jeweils t' durch t ersetzen können. Sie erhalten dann

$$\frac{d}{dt} f_e(k,t) = \frac{1}{\hbar^2} \left(\underline{\mu} \cdot \underline{\mathcal{E}}_0(t)\right)^2 [1 - f_e(k,t) - f_h(k,t)] \int_{t_0}^{t} dt' F(t') \quad (7)$$

  mit einer oszillierenden Funktion $F(t)$, d.h. eine lineare Differentialgleichung ohne Gedächnis, da die Werte $\frac{d}{dt} f_{e,h}(k,t)$ nicht mehr von früheren Werten $f_{e,h}(k,t')$, $t' < t$, abhängen (Markov-Näherung).
- Um das verbleibende Integral abzuschätzen, lassen Sie t_0 gegen $-\infty$ streben und benutzen Sie, dass $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iE^{\pm}x} = 2\pi\delta(E^{\pm})$ mit $E^{\pm} = E_n - E_{n_0} \pm \hbar\omega$. Gruppieren Sie dabei überall $e^{\pm i(\omega_p - \omega)(t-t')}$ und vernachlässigen Sie dann alle schnell oszillierenden Beiträge mit $e^{\pm 2i\omega t}$ (Random Phase Approximation, RWA). Dies führt auf die Übergangsrate nach Fermis Goldener Regel:

$$\frac{d}{dt} f_e(k,t) = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\underline{\mu} \cdot \underline{\mathcal{E}}_0(t)\right)^2 [1 - f_e(k,t) - f_h(k,t)] \left[\delta(E^+) + \delta(E_-)\right]. \quad (8)$$

- Wenden Sie dieselbe Prozedur auf Elektron-Phonon- und Elektron-Elektron-Wechselwirkungen an und leiten Sie die jeweiligen Stoßintegrale der semiklassischen Boltzmanngleichung ab. Diskutieren Sie die Gültigkeitsgrenzen der Boltzmanngleichung.

Literatur

[1] E. Schöll (Editor): *Theory of Transport Properties of Semiconductor Nanostructures*, vol. 4 of *Electronic Materials Series* (Chapman and Hall, London, 1998).

Projekt 11: *Maxwell-Dämon in quantenmechanischen Transportsystemen*

Betreuer: Arash Azhand

Der Maxwell'sche Dämon ist ein Gedankenexperiment des schottischen Physikers James Clerk Maxwell (1831–1879) zum zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Solch ein Dämon kann als versteckter idealisierter Mechanimus verstanden werden, der die Entropiebilanz eines thermodynamischen Gleichgewichts-System manipuliert, ohne dabei die Energiebilanz zu verändern. Mitglieder der AG Brandes [1] konnten mittels eines Einzelelektronentransistors, welcher an einen Quantenpunktkontakt gekoppelt ist, zeigen, dass sowohl der Zustand des Transistors gemessen werden als auch mittels geeigneter Rückkopplungs ein (makroskopischer) Strom entgegen der Potentialdifferenz fließen kann. Dies verletzt die traditionelle Form des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik und stellt eine konkrete Realisierung eines Maxwell'schen Dämons dar. Trotz dieser scheinbaren Verletzung ist es möglich, dieses System konsistent thermodynamisch zu interpretieren, mittels stochastischer Thermodynamik [2], wenn man den Einfluss der Rückkopplungskontrolle berücksichtigt.
Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch.
- Erarbeiten Sie, wie die Quantenmechnik für stark wechselwirkende Systeme mittels Mastergleichungen beschrieben werden kann [3, 4].
- Zeigen Sie explizit anhand eines Ein-Niveausystems, wie die Raten bestimmt werden und wie man die Dynamik der Zustände in der Matrixdarstellung formuliert.
- Prüfen Sie die Annahmen in der Publikation [1] und diskutieren Sie Stärken und Schwächen dieser Herangehensweise.
- Diskutieren Sie die abschließende Aussage der Autoren: "Ein System, welches einem Maxwell'schen Dämon ausgesetzt ist, stellt nur eine Idealisierung dar, in welcher die Dissipation durch die Ankopplung des Dämons selber vernachlässigt wird".

Literatur

[1] P. Strasberg, G. Schaller, T. Brandes, and M. Esposito: *Thermodynamics of a physical model implementing a maxwell demon*, Phys. Rev. Lett. **110**, 040601 (2013).

[2] M. Esposito: *Stochastic thermodynamics under coarse graining*, Phys. Rev. E **85**, 041125 (2012).

[3] T. Brandes: *Quantensysteme im Nichtgleichgewicht*, http://wwwitp.physik.tu-berlin.de/brandes/qm2012.pdf (2012).

[4] G. Schaller: *Non-Equilibrium Master Equations*, http://wwwitp.physik.tu-berlin.de/~schaller/download/NEQME1.pdf.

Projekt 12: *Symmetrien in der Quantenmechanik*

Betreuer: Arash Azhand

Symmetrien spielen eine zentrale Rolle in der Entwicklung der theoretischen Physik, angefangen bei der klassischen analytischen Mechanik, in deren Rahmen das universelle Theorem von Noether jede Symmetrie in einer Bewegungsgleichung mit einer Erhaltungsgröße veknüpft, bis zu den modernen Versuchen, die Allgemeine Relativitätstheorie mit der Quantenmechanik zu vereinigen [1]. In diesem Projekt soll es nun darum gehen, grundlegende Symmetrieeigenschaften in der Quantenmechanik zu erarbeiten und diese an Beispielen zu veranschaulichen.
Die folgenden Punkte dienen als Leitfaden:

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch.
- Veranschaulichen Sie die Rolle der Raum- und Zeittranslationen für quantenmechanische Zustände. Was ist der unitäre Translationsoperator, wie wirkt er auf quantenmechanische Zustände?
- Was ist der Unterschied zwischen kontinuierlichen und diskreten Transformationen?
- Was ist der Unterschied zwischen transformierten Zuständen und transformierten Operatoren?
- Finden bzw. konstruieren Sie anschauliche Beispiele.

Literatur

[1] W. Greiner and B. Müller: *Quantum Mechanics: Symmetries* (Springer-Verlag, 1989).

Projekt 13: *Rotationssymmetrie und Drehimpuls in der Quantenmechanik*

Betreuer: Arash Azhand

Symmetrien spielen eine zentrale Rolle in der Entwicklung der theoretischen Physik, angefangen bei der klassischen analytischen Mechanik, in deren Rahmen das universelle Theorem von Noether jede Symmetrie in einer Bewegungsgleichung mit einer Erhaltungsgröße veknüpft, bis zu den modernen Versuchen, die Allgemeine Relativitätstheorie mit der Quantenmechanik zu vereinigen [1]. In diesem Projekt soll es nun darum gehen, die Verbindung zwischen Rotationssymmetrie und dem quantenmechanischen Drehimpuls zu verdeutlichen.
Die folgenden Punkte dienen als Leitfaden:

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch.
- Was ist eine irreduzible Darstellung der Rotationsgruppe $SO(3)$?
- Finden Sie allgemeine Matrixdarstellungen des Drehimpulses und veranschaulichen Sie das ganze für Spin 1/2, Spin 3/2 und Spin 1.
- Was sind Clebsch-Gordon-Koeffizienten und wie kann man Sie berechnen?
- Finden bzw. konstruieren Sie anschauliche Beispiele.

Literatur

[1] W. Greiner and B. Müller: *Quantum Mechanics: Symmetries* (Springer-Verlag, 1989).

Projekt 14: *Photonen mit nichtverschwindendem chemischen Potenzial und Bose-Einstein-Kondensation von Photonen*

Betreuer: Eckehard Schöll

In der Einstein'schen Ableitung der Planck'schen Strahlungsformel wird angenommen, dass das bosonische Photonensystem an ein elektronisches 2-Niveau-System im thermodynamischen Gleichgewicht angekoppelt wird, d.h. das Besetzungsverhältnis der beiden Niveaus E_1, E_2 wird durch eine Gleichgewichtsverteilung beschrieben. Die Bilanz der Übergangsraten für Absorption und stimulierte und spontane Emission ergibt dann die Planck'sche Strahlungsformel mit $h\nu = E_2 - E_1$, d.h. eine Bose-Einstein-Verteilung der mittleren Photonenzahl mit verschwindendem chemischen Potenzial $\mu = 0$.
Nimmt man nun an, dass das Photonensystem an ein elektronisches Nichtgleichgewichts-System mit zwei Quasi-Fermi-Niveaus $F_n \neq F_p$ angekoppelt wird (z.B. Leitungs- und Valenzband einer Halbleiterdiode mit angelegter Spannung $U = F_n - F_p$), so führt die gleiche Bilanz auf eine Bose-Einstein-Verteilung mit nichtverschwindendem chemischen Potenzial $\mu = F_n - F_p$ [1, 2]. Diese Verteilung zeigt eine "Bose-Einstein-Kondensation" von Photonen im Nichtgleichgewicht für $h\nu = \mu$, also einen Nichtgleichgewichts-Phasenübergang.

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch. Gibt es Arbeiten, welche auf den Referenzen [1, 2] aufgebaut haben?
- Vollziehen Sie die Ableitung der Nichtgleichgewichts-Photonenverteilung mit nichtverschwindendem effektivem chemischen Potenzial nach.
- Wenden Sie die Überlegung auf eine Halbleiterdiode an und skizzieren Sie das Fermi-Niveau der pn-Struktur im thermodynamischen Gleichgewicht sowie die Quasi-Fermi-Niveaus F_n, F_p bei Anlegen einer Spannung (a) in Vorwärtsrichtung, (b) in Sperr-Richtung. Wie kann man die Differenz der Quasi-Fermi-Niveaus durch den Pumpstrom und Ladungsträgerinjektion steuern?
- Zeigen Sie, dass der Nichtgleichgewichts-Phasenübergang genau dem Laserübergang entspricht, und dass die Bedingung der Bose-Einstein-Kondensation die Laserbedingung für die Laserschwelle $F_n - F_p = E_{gap}$ (Bandlücke E_{gap}) ergibt. Wie muss man die Bilanzgleichungen ergänzen, damit keine Singularität auftritt? Diskutieren Sie die semiklassischen Ratengleichungen der Lasertheorie und die resultierende nichtlineare Dynamik (Relaxationsoszillationen) [2, 3].

Literatur

[1] P. T. Landsberg: *Photons at non-zero chemical potential*, J. Phys. C **14**, L1025 (1981).

[2] E. Schöll and P. T. Landsberg: *Nonequilibrium kinetics of coupled photons and electrons in two-level systems of the laser type*, J. Opt. Soc. Am. **73**, 1197 (1983).

[3] W. W. Chow and S. W. Koch: *Semiconductor-Laser Fundamentals* (Springer, Berlin, 1999).