Prof. Dr. Holger Stark
Johannes Blaschke, Alice von der Heydt, Benjamin Lingnau, Maria Zeitz,
Samuel Brem, Christopher Wächtler

4. Übungsblatt – Theoretische Physik III: Elektrodynamik

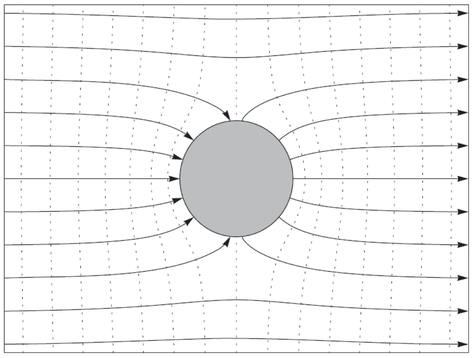
Abgabe: Mo 16.11.2015 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

M Aufgabe 10: *Energie von Dipolen*

Berechnen Sie die Wechselwirkungsenergie U_{DD} von zwei Dipolen $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$. Nehmen Sie der Einfachheit halber an, dass der Verbindungsvektor der beiden Dipole $\mathbf{r} \parallel \mathbf{e}_z$. Außerdem soll sich $\mathbf{p}_1$ in der x-z-Ebene befinden ($\phi_1 = 0$). Der Vektor $\mathbf{p}_2$ sei frei.
Bestimmen Sie die Minima und Maxima von U_{DD} in Abhängigkeit der relevanten Winkel ϑ_1, ϑ_2 und ϕ_2.

S Aufgabe 11 (10 Punkte): *Leitende Kugel im homogenen elektrischen Feld*

Eine ungeladene Metallkugel mit dem Radius R befindet sich im homogenen elektrischen Feld $\mathbf{E} = (0, 0, E_0)$. Gesucht ist das elektrostatische Potential $\phi(\mathbf{r})$



(a) Um die Symmetrie der Kugel nutzen zu können, begeben wir uns in Kugelkoordinaten. Stellen Sie zunächst das nur zu dem elektrischen Feld gehörige Potential $\phi_{\text{ex}}(\mathbf{r})$ durch ein geeignetes Legendre- Polynom dar.

(b) Finden Sie die korrekten Randbedingungen für $\phi(\mathbf{r})$

(i) am Rand der Kugel $r = R$

(ii) unendlich weit weg von der Kugel, für $r \to \infty$

(c) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die zylindersymmetrischen Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten mit dem Ansatz

$$\phi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + b_l r^{-(l+1)} \right) P_l(\cos \vartheta) \tag{1}$$

gelöst wird, wobei P_l die Legendre-Polynome sind. Nutzen Sie die in (b) gefundenen Randbedingungen, um die Konstanten in (1) zu bestimmen. Berechnen Sie $\phi(\mathbf{r})$ und $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

(d) Berechnen Sie die Oberflächenladungsdichte σ.

(e) Vergleichen Sie das in (c) bestimmte Potential $\phi(\mathbf{r})$ mit der aus der Vorlesung bekannten Multipolentwicklung. Bestimmen Sie so das sog. induzierte Dipolmoment $\mathbf{p}$.

S Aufgabe 12 (10 Punkte): *Quadrupolmoment*

In dieser Aufgabe soll das Quadrupolmoment einer Ladungsverteilung näher untersucht werden. Der kartesische Quadrupoltensor ist durch

$$Q_{ij} = \int_{\mathbb{R}^3} (3x_i x_j - \delta_{i,j} r^2) \varrho(\mathbf{r}) \, \mathrm{d}^3 r \tag{2}$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, dass Q_{ij} symmetrisch (d.h. $Q_{ij} = Q_{ji}$) und spurlos (d.h. $\sum_{i=1}^{3} Q_{ii} = 0$) ist.

Die Ladungsverteilung in einem Atomkern soll durch einen Rotationsellipsoiden mit homogener Ladungsdichte ρ_0 angenähert werden. Dieser habe die Halbachsen a und b.

(b) Benutzen Sie die Symmetrie der Ladungsverteilung und Aufgabenteil (a) um zu zeigen, dass in diesem Fall der Quadrupoltensor allein durch das Element $Q_{33} \equiv Q$ (*dem* Quadrupolmoment) bestimmt ist.

(c) Berechnen Sie Q! Drücken Sie Q dabei durch die Gesamtladung q des Kerns aus.
Hinweis: Punkte (x, y, z) innerhalb des Volumens eines Rotationsellipsoiden erfüllen die Gleichung $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1$.

(d) Das Quadrupolmoment des stabilen Europium-Isotops ^{153}*Eu* wurde experimentell zu $Q/e = 2.5 \cdot 10^{-28}\mathrm{m}^2$ bestimmt (e ist die Elementarladung). Wenn man annimmt, dass die Ladungsverteilung und das Kernvolumen deckungsgleich sind und der mittlere Radius des Kerns $R = \frac{a+c}{2} = 7 \cdot 10^{-15}\mathrm{m}$ beträgt, wie lautet die relative Abweichung $\frac{c-a}{R}$ der Halbachsen?

Bonusaufgabe 13 (3 Zusatzpunkte): *Earnshaw Theorem*
Auf den Eckpunkten eines Würfels befinden sich 8 gleiche positive Ladungen q. Berechnen Sie das elektrische Potential $\phi(\mathbf{r})$ und das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Visualisieren Sie das Potential mit einem Programm Ihrer Wahl (Mathematica, Python)

(a) entlang einer Hauptachse des Würfels,

(b) entlang einer Diagonale und

(c) in drei Dimensionen, etwa mit dem Mathematica Befehl `ContourPlot3D[ ]`. Vergleichen Sie das Potential außerhalb und innerhalb des Würfels. Plotten Sie dazu u.a. die Äquipotentialfläche die knapp durch den Ursprung geht. Was fällt Ihnen auf? *Hinweis:* Die Option `Contours` könnte hilfreich sein.

Was passiert, wenn wir eine weitere positive Ladung in den Mittelpunkt des Würfels bringen? Kann es eine stabile Gleichgewichtsposition geben? Begründen Sie.

Zum Übungsbetrieb: Die Übungsaufgaben teilen sich auf in mündliche M und schriftliche S Aufgaben. Die Bedingung für die Vergabe eines Übungsscheins gliedert sich daher in zwei Teile:

- Es müssen mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte erreicht werden. Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen. Ab dem zweiten Übungsblatt werden Einzel- und Zweierabgaben nicht mehr akzeptiert!

- Vorrechnen: Jeder Student kreuzt vor jeder Übung diejenigen Aufgaben auf einer ausliegenden Liste an, die er oder sie bearbeitet hat. Wer eine Aufgabe angekreuzt hat, ist bereit diese Aufgabe an der Tafel vorzurechnen. Für den mündlichen Teil des Scheinkriteriums müssen am Ende des Semesters in Summe 50% der mündlichen Aufgaben angekreuzt sein.

Prof. Dr. Holger Stark
Johannes Blaschke, Alice von der Heydt, Benjamin Lingnau, Maria Zeitz,
Samuel Brem, Christopher Wächtler

	Mo	**Di**	**Mi**	**Do**	**Fr**
08-10					EW 203 HS
10-12				EB 133C AH/MZ	BH-N 333 BL/JB
12-14	ER 164 CW	H 3012 SB	EW 203 HS		
14-16			H 1029 CW		
16-18			BH-N 333 SB		

Sprechstunden			
HS	Prof. Dr. Holger Stark	Fr 11:30–12:30	EW 709
AH	Alice von der Heydt	Do 13–14	EW 266
BL	Benjamin Lingnau	Di 14–15	EW 629
CW	Christopher Wächtler	Mo 14–15	EW 060
JB	Johannes Blaschke	Do 10–11	EW 708
MZ	Maria Zeitz	Mi 10–11	EW 702
SB	Samuel Brem	Di 11–12	EW 060