Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Javier Cerrillo, Dr. Vitaly Belik, Mathias Hayn, Alexander Kraft
Sina Böhling, Manuel Katzer, Anne-Kathleen Malchow, Jonas Rezacek

1. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: Mo. 26. Oktober 2015 bis 12 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

Aufgabe 1 (2+3+2+3=10 Punkte): *Wiederholung: Differentiation im* $\mathbb{R}^3$
Wie üblich ist $\mathbf{r} = (x, y, z)^{\mathrm{T}} = x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z$ der Ortsvektor mit dem Betrag $r = |\mathbf{r}|$.

(a) Berechnen Sie den Gradienten der beiden skalaren Felder

$$\psi_1(\mathbf{r}) = xy + yz + zx \quad \text{und} \; \psi_2(\mathbf{r}) = \mathrm{e}^{-x} \sin y. \tag{1}$$

Wie lautet die Richtungsableitung des Feldes ψ_1 an den Punkten $\mathbf{r}_1 = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ und $\mathbf{r}_2 = (0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ jeweils in Richtung des Koordinatenursprungs?

(b) Berechnen Sie sowohl die Divergenz als auch die Rotation der beiden Vektorfelder

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \quad \text{und} \; \mathbf{A}_2(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} r \\ x \sin y \\ \mathrm{e}^{xy} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

(c) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld

$$\mathbf{A}_3(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x \\ 2z \end{pmatrix} \tag{3}$$

konservativ ist und geben Sie ein dazugehöriges Potential an.

(d) Visualisieren Sie das skalare Feld $\psi_3(\mathbf{r}) = x \sin y$ sowie dessen Gradientenfeld.

Aufgabe 2 (1+2=3 Punkte): *Kurvenintegrale & Satz von Stokes*

(a) Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -2y \\ x \\ z \end{pmatrix} \tag{4}$$

entlang der Kurve beschrieben durch $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)^{\mathrm{T}}$ mit $0 \le t \le 1$.

(b) Verwenden Sie den Satz von Stokes, um das Kurvenintegral

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{5}$$

zu berechnen. Hier ist $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (2x - y, -yz^2, -y^2 z)^{\mathrm{T}}$ und $\mathcal{C}$ bezeichnet die Kurve, welche durch die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ parametrisiert wird.

Aufgabe 3 (4+2=6 Punkte): *Bahnen im Gravitationspotential*
In der Vorlesung wurde die Integralformel

$$\varphi(r) = \int \frac{L/r^2}{\sqrt{2m[E - V(r)] - L^2/r^2}}\,\mathrm{d}r + c. \tag{6}$$

für den Azimutwinkel als Funktion von r hergeleitet. Dabei ist $V(r)$ ein allgemeines Zentralpotential und c eine Integrationskonstante.

(a) Zeigen Sie explizit, dass φ für das Gravitationspotential $V(r) = -GMm/r$ durch

$$\varphi(r) = -\arcsin\left(\frac{1/r - b}{\sqrt{a + b^2}}\right) + c \tag{7}$$

gegeben ist. Wie lauten die Konstanten a und b?
Hinweis: Bringen Sie das Integral in Gl. (6) auf die Form $\int \mathrm{d}w \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}$. Lösen Sie dieses Integral durch eine geeignete Substitution.

(b) Stellen Sie die Lösung in der Ellipsenform

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon \sin(\varphi - c)} \tag{8}$$

dar und geben Sie den Parameter p und die Exzentrizität ε an. Üblicherweise setzt man $c = \pi/2$. Wieso kann man das machen, bzw. welche Bedeutung hat dies?

Aufgabe 4 (1+1+3+3=8 Punkte): *Zylinderkoordinaten*
Die Zylinderkoordinaten ϱ, φ, z eines Punktes mit den kartesischen Koordinaten $\mathbf{r} = (x, y, z)^{\mathrm{T}} = x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z$ werden durch folgenden Transformation eingeführt:

$$x = \varrho\cos\varphi, \;\; y = \varrho\sin\varphi. \tag{9}$$

(a) Berechnen Sie die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_\varrho, \mathbf{e}_\varphi$ und $\mathbf{e}_z$ der Zylinderkoordinaten und drücken Sie $\mathbf{r}$ durch diese Einheitsvektoren aus.

(b) Betrachten Sie einen Massenpunkt der Masse m, welcher sich auf einer Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ bewegt und berechnen Sie den Impuls $\mathbf{p}(t)$ in Zylinderkoordinaten, d.h. $\mathbf{p} = p_\varrho\,\mathbf{e}_\varrho + p_\varphi\,\mathbf{e}_\varphi + p_z\,\mathbf{e}_z$.
Hinweis: Im Allgemeinen ist $p_\varphi \neq 0$.

(c) Bestimmen Sie den Drehimpuls $\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t)$ in Zylinderkoordinaten. Zeigen Sie, dass ein zeitlich konstanter Drehimpuls zu Keplers zweitem Gesetz (*Flächensatz*) in der Form

$$\varrho^2\dot{\varphi} = \text{konst.} \tag{10}$$

führt.

(d) Stellen Sie die kinetische Energie T des Massenpunktes in Zylinderkoordinaten dar und zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{11}$$

mit $q_1 = \varrho, q_2 = \varphi$ und $q_3 = z$ äquivalent zu den Newton'schen Bewegungsgleichungen eines freien Teilchens ist.