Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Javier Cerrillo, Dr. Vitaly Belik, Mathias Hayn, Alexander Kraft
Sina Böhling, Manuel Katzer, Anne-Kathleen Malchow, Jonas Rezacek

2. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: Fr. 30. Oktober 2015 bis 12:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

Aufgabe 1 (1+7+2+2=12 Punkte): *Periheldrehung*
Auf dem Weg von Perihel zu Perihel ändert sich die Position des Perihels um den Winkel:

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{L/r^2}{\sqrt{2m[E-V(r)]-L^2/r^2}}\,\mathrm{d}r. \tag{1}$$

Je nachdem, ob das Integral ein rationales Vielfaches von π ist, schließt sich die Bahnkurve oder nicht.

(a) Zeigen Sie zunächst, das sich Gl. (1) als

$$\Delta\varphi = -2\sqrt{2m}\frac{\partial}{\partial L}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{E-\frac{L^2}{2mr^2}-V(r)}\,\mathrm{d}r \tag{2}$$

schreiben lässt.

Wir wissen, dass das Newton'sche Potential $V(r) \sim -1/r$ zu geschlossenen Bahnen führt. Hat das Potential jedoch nicht genau diese Form, sondern ist um einen kleinen Beitrag $\delta V(r)$ gestört, so hat dies zur Folge, dass die Bahnkurve i.A. bei endlicher Bewegung nicht mehr geschlossen bleibt.

(b) Betrachten Sie das Potential $V(r) = -GMm/r + \delta V(r)$, mit $|\delta V(r)| \ll GMm/r$, $\forall\ r \in [r_{\min}, r_{\max}]$. Berechnen Sie $\Delta\varphi$ und zeigen Sie, dass in niedrigster Ordnung in $\delta V(r)$ gilt:

$$\delta\varphi = \Delta\varphi - 2\pi \approx 2m\frac{\partial}{\partial L}\Big[\frac{1}{L}\int_0^{\pi} r^2\delta V(r)\,\mathrm{d}\varphi\Big]. \tag{3}$$

Der Winkel $\delta\varphi$ ist dabei der Unterschied zu einer geschlossenen Bahn bei einem Umlauf. Mit $r = r(\varphi)$ wird die Bahn der Bewegung mit $\delta V(r) = 0$ bezeichnet.
Hinweise: Wie hängt die Wurzel in Gl. (2) mit $\dot{r}$ zusammen? Aus der Gleichung für den Drehimpuls in Kugelkoordinaten erhält man die Relation $\dot{\varphi} = L/(mr^2)$.

(c) Die allgemeine Relativitätstheorie liefert eine Korrektur des $1/r$-Gesetzes der Gravitation. Diese ist in niedrigster Ordnung durch $\delta V(r) = -\gamma/r^3$ gegeben. Zeigen Sie, dass sich für diese Korrektur dann für die Periheldrehung $\delta\varphi = 6\pi\gamma GMm^3/L^4$ ergibt.

(d) Berechnen Sie den Beitrag zur Periheldrehung des Merkur für die Störung aus Aufgabenteil (c). Es gilt $\gamma = \frac{GML^2}{mc^2}$, mit der Lichtgeschwindigkeit c. Geben Sie das Ergebnis in Bogensekunden pro Jahrhundert an.

Aufgabe 2 (5 Punkte): *Gravitationsfeld eines Planeten*
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Massendichte $\varrho(\mathbf{r})$ die Quelle des Newton'schen Gravitationfeldes $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ ist:

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}) = -4\pi G\varrho(\mathbf{r}). \tag{4}$$

Mithilfe des Satzes von Gauß lässt sich daraus das Gravitationsfeld von Körpern berechnen. Allerdings müssen die Körper bzw. Massendichten bestimmte Symmetrien aufweisen. Als einfaches Beispiel dafür sollen Sie das am Ort $\mathbf{r}$ erzeugte Newton'sche Gravitationsfeld $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ eines kugelförmigen Planeten vom Radius R mit homogener Massendichte ϱ_0 berechnen.

Integrieren Sie dazu über eine Kugel mit dem Radius r und verwenden Sie den Ansatz $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = g(r)\,\mathbf{e}_r$. Begründen Sie den Ansatz für $\mathbf{g}$. Skizzieren Sie $g(r)$.

Welchem anderen physikalischen Objekt entspricht dieses Gravitationsfeld für Punkte außerhalb des Planeten?

Hinweis: Betrachten Sie die Fälle $r < R$ und $r > R$ separat.

Aufgabe 3 (3+2+2+2=9 Punkte): *Bewegung mit Zwangskräften*
Ein Teilchen der Masse m bewege sich reibungsfrei in zwei Raumdimensionen auf einer Kurve, welche durch die Zwangsbedingung $y = f(x)$ beschrieben wird. Zusätzlich wirkt auf das Teilchen die konstante Gravitationskraft $\mathbf{F} = -m\,g\,\mathbf{e}_y$.

(a) Stellen Sie die Newton'schen Bewegungsgleichungen des Teilchens unter Berücksichtigung der Zwangskräfte auf. Benutzen Sie die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren um die Zwangskräfte zu eliminieren und zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung des Massepunktes durch

$$\ddot{x}(1 + f'^2) + \dot{x}^2 f' f'' + g f' = 0 \tag{5}$$

gegeben ist. Wie üblich bedeutet dabei $\dot{x}$ die zeitliche Ableitung von $x = x(t)$ und f' steht für die räumliche Ableitung von $f = f(x)$.

(b) Stellen sie die kinetische und die potentielle Energie auf. Eliminieren Sie die Koordinate y, sodass beide Energien nur noch von x abhängen. Zeigen Sie damit, dass die Gesamtenergie zeitlich erhalten ist.

(c) Führen Sie neue Koordinaten ein, sodass die Zwangsbedingung automatisch erfüllt ist und stellen Sie die dazugehörige Lagrange-Funktion auf. Benutzen Sie dann den Lagrange-Formalismus 2. Art, um sich nochmals die Bewegungsgleichung des Teilchens herzuleiten.

(d) Wir betrachten nun den Spezialfall, dass das Teilchen auf die schiefe Bahn geraten ist. Für die Zwangsbedingung gilt dann $f(x) = -x\tan\alpha$. Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Teilchens auf und zeigen Sie, dass die Zwangskraft

$$\mathbf{Z} = mg\cos\alpha(\mathbf{e}_x \sin\alpha + \mathbf{e}_y \cos\alpha) \tag{6}$$

lautet.