Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Javier Cerrillo, Dr. Vitaly Belik, Mathias Hayn, Alexander Kraft
Sina Böhling, Manuel Katzer, Anne-Kathleen Malchow, Jonas Rezacek

8. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: Fr. 11. Dezember 2015 bis 12:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

Aufgabe 1 (3+7=10 Punkte): *Verkürzte Wirkung*

1. Berechnen Sie die verkürzte Wirkung $W(\mathbf{q})$ eines freien Teilchens der Masse m in zwei räumlichen Dimemsionen. Lösen Sie hierfür die verkürzte Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung
$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}\right) = E$$
für $W(\mathbf{q})$, z.B. durch einen linearen Ansatz für $W(\mathbf{q})$. Skizzieren Sie die Äquipotentiallinien von W und zeichnen Sie $\nabla_{\mathbf{q}} W$ ein. Interpretieren Sie das Ergebnis.

2. Berechnen und interpretieren Sie das selbe Problem in Polarkoordinaten. Die verkürzte Wirkung W wird dann eine Funktion $W(r, \phi)$. Diskutieren Sie zunächst einen Fall, wo die Winkelabhängigkeit nicht auftritt. Was bedeutet dieser Fall physikalisch?
Tipp: Um den allgemeinen Fall zu lösen drücken Sie die Wirkung aus 1. in Polarkoordinaten aus und zeigen Sie, dass dieser Ansatz die Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung löst.

Aufgabe 2 (3+2=5 Punkte): *Oszillator mit der zeitabhängigen Frequenz*
Die erzeugende Funktion für die kanonische Transformation ist gegeben durch
$$F_1(q, Q, t) = \frac{m}{2}\omega(t) q^2 \cot Q.$$

1. Wie sieht die kanonische Transformation aus? Die Hamiltonfunktion des harmonischen Oszillators lautet $H = p^2/(2m) + m\omega^2 q^2/2$.

2. Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen in (P, Q)-Variablen auf.

Aufgabe 3 (2+8=10 Punkte): *Gravitationsfeld*

1. Stellen Sie die Hamiltonfunktion in dreidimensionalen kartesischen Koordinaten eines Teilchens auf, welches sich unter Gravitationseinfluss befindet. Das Gravitationsfeld wirkt dabei in z-Richtung und ist homogen. Was gilt für die Zeitentwicklung von H?

2. Lösen Sie die Bewegungsgleichungen mit der Methode der Hamilton-Jacobi-Differential gleichung. Verwenden Sie für die Lösung geeignete, einfache Anfangsbedingungen.

Aufgabe 4 (8 Punkte): *Eindimensionale, periodische Bewegung*
Berechnen Sie die Periode einer eindimensionalen Bewegung für das Potential

$$V(q) = \frac{1}{2}kq^2 + \alpha q^4$$

mit $\alpha > 0$ näherungsweise durch Taylorentwicklung für kleine α. Beachten Sie dabei, dass die Periode solch einer Bewegung durch die Ableitung des Wirkungsintegrals $\oint p(q,E)dq$ nach der Energie gegeben ist.