Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Javier Cerrillo, Dr. Vitaly Belik, Mathias Hayn, Alexander Kraft
Sina Böhling, Manuel Katzer, Anne-Kathleen Malchow, Jonas Rezacek

11. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: Fr. 15. Januar 2016 bis 12:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

Aufgabe 1 (1+6+2+2=11 Punkte): *Harmonischer Oszillator*

Gegeben sei der gedämpfte harmonische Oszillator mit äußerer Kraft $f(t)$.

$$\ddot{x}(t) + \frac{1}{\tau}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$

(a) Wie funktioniert bei dieser Gleichung das Umskalieren auf die dimensionslose Zeit $\tilde{t} = t\omega_0$?

(b) Berechnen Sie die Matrix des Zeitentwicklungsoperators $U(t, t_0)$ und zeigen Sie damit, dass sich für homogene Anfangsbedingungen $x_0 = p_0 = 0$ zur Zeit t_0 die Lösung für $x(t)$ in der folgenden Form schreiben lässt:

$$x(t) = \int_{t_0}^{\infty} dt' G(t - t') f(t') \tag{1}$$

$$G(t) = \Theta(t) e^{-\frac{t}{2\tau}} \frac{1}{\omega'} \sin(\omega' t) \tag{2}$$

$$\omega' \equiv \omega_0 \sqrt{1 - (2\tau\omega_0)^{-2}} \tag{3}$$

Hierbei ist $\Theta(t)$ die **Heaviside-Stufenfunktion**, d.h. $\Theta(t < 0) = 0$ und $\Theta(t \geq 0) = 1$. Die Funktion $G(t)$ heißt **Greensche Funktion**.

(c) Bestätigen Sie durch Nachrechnen, dass die Fouriertransformierte der Greenschen Funktion sich ergibt als:

$$\tilde{G}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dt G(t) e^{i\omega t} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\frac{\omega}{\tau}}$$

(d) Berechnen Sie die Lösung $x(t)$ für eine periodische Kraft $f(t) = f_0 e^{i\Omega t}$.

Aufgabe 2 (2+1+2+4=9 Punkte): *Kapitza-Pendel (Erweiterungsaufgabe)*

Bei schnellen Treibungsfrequenzen Ω gelingt es, das Kapitza-Pendel aus Zettel 10 zu invertieren und eine Schwingung um die obere Position zu erreichen. Die Bewegungsgleichung lautet:

$$\ddot{\phi}(t) = \left(-\omega_0^2 + \frac{d}{l}\Omega^2 \sin(\Omega t)\right) \sin(\phi(t)) \tag{4}$$

Um dieses Verhalten analytisch anschaulich zu machen zerlegen wir die Bewegung des Pendels in schnelle und langsame Komponenten und leiten ein effektives Potential her.

(a) Zerlegen Sie die Bewegung des Pendels in eine langsame Komponente $\psi(t)$ und eine schnell-oszillierende Komponente $\delta(t)$. Zeigen Sie, dass die folgende Bewegungsgleichung die Bewegung für die schnell-oszillierende Komponente dominiert:

$$\ddot{\delta}(t) = \frac{d}{l}\Omega^2 \sin(\Omega t)\sin(\psi) \tag{5}$$

Nehmen Sie dabei an, dass δ klein sei.

(b) Integrieren Sie die Differentialgleichung (5) für die kleine schnell-oszillierende Komponente δ. *Hinweis: nehmen Sie die langsame Komponente als Konstante an und wählen Sie die Integrationskonstante so, dass das Ergebnis periodisch bleibt.*

(c) Setzen Sie die Lösung aus (b) in die ursprüngliche Bewegungsgleichung ein und mitteln Sie über die Periode der externe Treibung.

(d) Identifizieren Sie die gemittelte Bewegungsgleichung als den Effekt eines Potentials auf die langsame Komponente:

$$\ddot{\psi}(t) = -\frac{\partial}{\partial\psi}V_{eff}(\psi) \tag{6}$$

Zeigen Sie, dass

$$V_{eff} = -\omega_0^2 \cos\psi - \frac{d^2}{l^2}\Omega^2 \frac{1}{4}\cos^2\psi \tag{7}$$

und plotten Sie das effektive Potential und bestimmen Sie die Stabilitätspunkte. Ab welcher Frequenz Ω wird die invertierte Lösung stabil?

Aufgabe 3 (2+7=9 Punkte): *Van der Pol Oszillator*

Der Van der Pol Oszillator ist ein Beispiel für eine selbsterregte Schwingung mit stabilem Grenzzyklus:

$$\ddot{x}(t) + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad \text{wobei } \alpha \geq 0$$

(a) Erklären Sie anschaulich den Effekt des zweiten Summanden. Welche Funktion übernimmt er bei einer selbsterregten Schwingung? Was unterscheidet den Van der Pol Oszillator von einem harmonischen Oszillator?

(b) Zeigen Sie, dass für kleine Werte von α die Zeitentwicklung von $x(t)$ im Phasenraum gegen einen kreisförmigen Grenzzyklus mit Radius 2 strebt.

Hinweis: Schreiben Sie die Bewegungsgleichung als dynamisches System und transformieren Sie dies in Polarkoordinaten. Mitteln Sie über eine Oszillationsperiode.