Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Javier Cerrillo, Dr. Vitaly Belik, Mathias Hayn, Alexander Kraft
Sina Böhling, Manuel Katzer, Anne-Kathleen Malchow, Jonas Rezacek

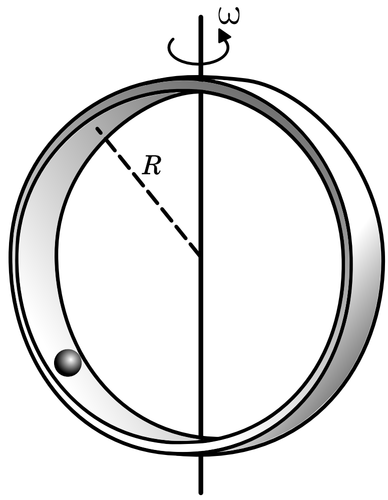
12. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: Fr. 22. Januar 2016 bis 12:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

Aufgabe 1 (4+1+5+3+2=15 Punkte): *Bifurkationen*

Betrachten Sie eine Kugel, welche sich reibungsfrei auf der Innenseite eines kreisförmigen Rings mit dem Radius R unter Einfluss eines homogenen Schwerefeldes bewegt. Der Ring dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse.



(a) Stellen Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen für die Kugel auf. Gehen Sie dabei das ganze Prozedere durch: Vom Ermitteln der Zwangsbedingungen und generalisierten Koordinaten, dem Aufstellen von kinetischer und potentieller Energie sowie der Lagrange-Funktion, dem Berechnen der kanonischen Impulse, bis hin zum Aufstellen der Hamilton-Funktion (Klausurvorbereitung!).

(b) Zeigen Sie, dass man die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen durch Umskalieren auf die Form

$$\dot{Q} = P \tag{1}$$
$$\dot{P} = \sin Q \, \cos Q + \mu \sin Q \tag{2}$$

bringen kann. Dabei bedeutet der Punkt eine Ableitung nach τ, mit $\tau = \omega t$ und der Parameter μ ist gegeben durch $\mu = \frac{g}{R\omega^2}$

(c) Betrachten Sie nun die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen aus dem Aufgabenteil (b) als dynamisches System und bestimmen Sie dessen Fixpunkte. Untersuchen Sie die Stabilität aller Fixpunkte mittels einer linearen Stabilitätsanalyse.

(d) Betrachten Sie die Winkelgeschwindigkeit ω als Kontrollparameter und stellen Sie ein Bifurkationsdiagramm auf.

(e) Diskutieren Sie die physikalische Bedeutung Ihrer Ergebnisse aus den Aufgabenteilen (c) und (d).

(f) **(4 Bonuspunkte)** Bestimmen Sie die Frequenzen kleiner Schwingungen um die stabilen Fixpunkte.

Aufgabe 2 (2+1+1+2+6+4=16 Punkte): *Fixpunkte im Lipkin–Meshkow–Glick-Modell*
In dieser Aufgabe sollen die Fixpunkte und Bifurkationen im sogenannte Lipkin–Meshkow–Glick-Modell (LMG) untersucht werden. Der wichtige Freiheitsgrad im LMG-Modell ist der Drehimpuls $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z) \equiv (J_1, J_2, J_3)$. Wir wollen daher zunächst allgemeine Eigenschaften des Drehimpulses untersuchen.
Für eine Bahnbewegung ist der (Bahn-)Drehimpuls gegeben durch:

$$J_k = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_k = \varepsilon_{knm} x_n p_m. \tag{3}$$

Hier ist ε_{knm} das Levi-Civita-Symbol und x_n, bzw. p_m sind die Komponenten des Ortsvektors $\mathbf{r}$, bzw. des Impulses $\mathbf{p}$. Außerdem wurde die Einstein'sche Summenkonvention verwendet.

(a) Benutzen Sie die kanonischen Poisson-Klammern für Ort und Impuls um die Poisson-Klammern

$$\{J_k, J_l\} = \varepsilon_{nkl} J_n \tag{4}$$

für den Drehimpuls herzuleiten. Diese Relation stellt eine alternative Definition für Drehimpulse dar.

Nun soll das LMG-Modell betrachten werden. Die Hamilton-Funktion hierfür lautet:

$$H(J_x, J_y, J_z) = \Delta J_z + \frac{1}{2}\gamma_x J_x^2 + \frac{1}{2}\gamma_y J_y^2. \tag{5}$$

Dabei sind Δ, γ_x und γ_y positive Parameter.

(b) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen für J_x, J_y und J_z im LMG-Modell durch

$$\dot{J}_x = -\Delta J_y + \gamma_y J_y\, J_z, \tag{6}$$

$$\dot{J}_y = \Delta J_x - \gamma_x J_x\, J_z, \tag{7}$$

$$\dot{J}_z = (\gamma_x - \gamma_y) J_x\, J_y \tag{8}$$

gegeben sind. Bei der Herleitung der Bewegungsgleichungen sollen Sie *nicht* die explizite Definition der Drehimpulse aus Gleichung (3) benutzen.

(c) **(2 Bonuspunkte)** Die drei Bewegungsgleichungen aus (b) können auch in der kompakten Form $\dot{\mathbf{J}} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{J}$ geschrieben werden. Bestimmen Sie $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}(\mathbf{J})$.

(d) Zeigen Sie, dass der Betrag des Drehimpulses $|\mathbf{J}| = J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2 + J_z^2}$ eine Erhaltungsgröße ist. **Hinweis:** J ist genau dann erhalten, wenn auch J^2 erhalten ist.

Im Folgendem beschränken wir uns auf Lösungen des Differentialgleichungssystems mit positiven Werten für J_z. Beachten Sie auch, dass J_x, J_y und J_z stets kleiner gleich J sein müssen.

(e) Benutzen Sie die Erhaltung des Drehimpulses um eine Variable zu eliminieren und die Bewegungsgleichungen aus Aufgabenteil (b) in der Form

$$\dot{x} = -y + \kappa_y\, y\sqrt{1 - x^2 - y^2} \tag{9}$$

$$\dot{y} = x - \kappa_x\, x\sqrt{1 - x^2 - y^2} \tag{10}$$

zu schreiben. Dabei ist $x := J_x/J$, $y := J_y/J$ und $\kappa_n := J\,\gamma_n/\Delta$, $(n \in \{x, y\})$. Der Punkt bedeutet eine Ableitung nach τ, mit $\tau = t\Delta$.

(f) Bestimmen Sie nun die Fixpunkte und analysieren Sie deren Stabilität mittels einer linearen Stabilitätsanalyse.

(g) Stellen Sie in einem κ_x–κ_y-Diagramm die verschiedenen Fixpunkte dar. Skizzieren Sie außerdem für $\kappa_y < 1$ ein Bifurkationsdiagramm für x mit κ_x als Kontrollparameter.