Prof. Dr. Sabine Klapp
Dr. Judith Lehnert,
Dr. Marten Richter,
Dr. Torben Winzer

3. Übungsblatt – Quantenmechanik II

Abgabe: Do. 12. November 2015 bis 8:30 Uhr im Hörsaal

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und die Übung an!*

Aufgabe 1 (12 Punkte): *Reflexion und Transmission an einer Potentialschwelle*
Berechnen Sie den Reflexions- und Transmissionskoeffizienten an einer Potentialschwelle $e\phi(z) = V_0\Theta(z)$ nach der zeitunabhängigen Dirac-Gleichung

$$H_D|\Psi(\mathbf{r},t\rangle = E\Psi(\mathbf{r},t\rangle \tag{1}$$

mit dem Dirac-Operator $H_D = H_D^0 + e\phi$ und dem freien Anteil $H_D^0 = c\hat{\boldsymbol{\alpha}}\hat{\mathbf{p}} + \hat{\boldsymbol{\beta}}m_ec^2$. Überlegen Sie sich hierzu zunächst geeignete Lösungsansätze für $z < 0$ und $z > 0$. Nutzen Sie, dass alle Komponenten der Spinoren stetig sind. Betrachen und diskutieren Sie die Reflexion und Transmission für die Fälle

(i) $E - V_0 > mc^2$,

(ii) $|E - V_0| < mc^2$ und

(iii) für das sogenannte Klein'sche Paradoxon mit $E - V_0 < -mc^2$.

Aufgabe 2 (12 Punkte): *Transformation von Vektorfeldern*
In dieser Teilaufgabe betrachten wir das Transformationsverhalten eines Vektorfeldes $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, d.h. einer Abbildung $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, unter räumlichen Rotationen. Bei dem Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ kann es sich z.B. um eine Wellenfunktion oder um das elektromagnetische Vektorpotential handeln. Wir bezeichnen die Abbildung/Matrix, welche die Drehung mit dem Winkel φ um die Achse $\mathbf{n}$ beschreibt, mit $\mathcal{R}_\mathbf{n}(\varphi)$. Ist $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$ das Vektorfeld im gedrehten Koordinatensystem, so transformiert dieses sich gemäß

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathcal{R}_\mathbf{n}(\varphi) \cdot \mathbf{A}(\mathcal{R}_\mathbf{n}^{-1}(\varphi) \cdot \mathbf{r}). \tag{2}$$

Der Übersichtlichkeit halber betrachten wir nur Drehungen um die z-Achse

(a) Wie sieht die Drehmatrix $\mathcal{R}_z(\varphi)$ und ihre Inverse $\mathcal{R}_z^{-1}(\varphi)$ aus?

(b) Betrachten Sie nun infinitesimale Winkel $\varphi \ll 1$ und drücken Sie das Vektorfeld $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$ im gedrehten Koordinatensystem durch das Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ im nicht gedrehten Koordinatensystem mit Hilfe der Gleichung (2) aus. D.h. schreiben Sie Gleichung (2) in der Form $\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \hat{\mathcal{O}}\mathbf{A}(\mathbf{r})$, mit einem zu bestimmenden Operator $\hat{\mathcal{O}}$.

(c) Schreiben Sie den Operator $\hat{\mathcal{O}}$ als $\left[C - i\,\varphi\big(\hat{\mathcal{O}}_1 + \hat{\mathcal{O}}_2\cdot\big)\right]$, mit einer von φ unabhängigen Konstanten C, einem Differentialoperator $\hat{\mathcal{O}}_1$ und einem Operator $\hat{\mathcal{O}}_2$ ohne räumliche Ableitungen.

(d) Was ist die Bedeutung des Differentialoperators $\hat{\mathcal{O}}_1$ und wie steht er mit den Erzeugenden der Drehgruppe in Beziehung?

(e) Gehen Sie vom Limes infinitisimaler Winkel zu beliebigen Winkeln über.

In dieser Teilaufgabe übertragen wir unsere gewonnenen Erkenntnisse auf das Transformationsverhalten eines Vektorfeldes im Minkowskiraum $\mathbf{B} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ unter Lorentztransformationen. Wir bezeichnen die Abbildung/Matrix, welche die Lorentztransformation mit der Rapidität ζ ($\tanh\zeta = \frac{v}{c}$) um die Achse 3 beschreibt, mit $\mathcal{L}_3(\zeta)$. Ist $\mathbf{B}'(\mathbf{x})$ das Vektorfeld im transformierten Koordinatensystem, so transformiert dieses sich gemäß

$$\mathbf{B}'(\mathbf{x}) = \mathcal{L}_3(\zeta) \cdot \mathbf{B}(\mathcal{L}_{\mathbf{3}}^{-1}(\zeta) \cdot \mathbf{x}), \tag{3}$$

wobei $\mathbf{x}$ ein Viervektor ist.

(f) Wie sieht die Lorentztransformation mit der Rapidität in Matrixform $\mathcal{L}_{\ni}(\zeta)(\zeta)$ und ihre Inverse $\mathcal{L}_3^{-1}(\zeta)$ aus?

(g) Betrachten Sie nun infinitesimale Rapidität $\varphi \ll 1$ und drücken Sie das Vektorfeld $\mathbf{B}'(\mathbf{x})$ im transformierten Koordinatensystem durch das Vektorfeld $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ im untransformierten Koordinatensystem mit Hilfe der Gleichung (3) aus. D.h. schreiben Sie Gleichung (3) in der Form $\mathbf{B}'(\mathbf{x}) = \hat{\mathcal{O}}\mathbf{B}(\mathbf{x})$, mit einem zu bestimmenden Operator $\hat{\mathcal{O}}$.

(h) Schreiben Sie den Operator $\hat{\mathcal{O}}$ als $\left[C - i\,\zeta\big(\hat{\mathcal{O}}_1 + \hat{\mathcal{O}}_2\cdot\big)\right]$, mit einer von ζ unabhängigen Konstanten C, einem Differentialoperator $\hat{\mathcal{O}}_1$ und einem Operator $\hat{\mathcal{O}}_2$ ohne räumliche Ableitungen.

(i) Was ist die Bedeutung des Differentialoperators $\hat{\mathcal{O}}_1$ und wie steht er zu den erzeugenden der Lorentzgruppe in Beziehung?

(j) Gehen Sie vom Limes infinitisimaler Rapidität zu beliebiger Rapidität über.