

Prof. Dr. Sabine Klapp
 Dr. Judith Lehnert,
 Dr. Marten Richter,
 Dr. Torben Winzer

6. Übungsblatt – Quantenmechanik II

Abgabe: Do. 3. Dezember 2015 bis 8:30 Uhr im Hörsaal

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** und **ausführliche Kommentare** zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und die Übung an!

Aufgabe 1 (8 Punkte): Vertauschungsrelationen für Fermionen und Bosonen

Beweisen Sie analog zu dem Beispiel aus der Vorlesung (also durch Anwendung auf einen Fock Zustand) die Vertauschungsrelationen für Vielteilchen Erzeuger und Vernichter im Fall von

1. Fermionen $[a_i, a_j]_+ = 0$, $[a_i^\dagger, a_j^\dagger]_+ = 0$, $[a_i, a_j^\dagger]_+ = \delta_{i,j}$
2. Bosonen $[c_i, c_j]_- = 0$, $[c_i^\dagger, c_j^\dagger]_- = 0$, $[c_i, c_j^\dagger]_- = \delta_{i,j}$.

Aufgabe 2 (8 Punkte): Hamiltonoperatoren in zweiter Quantisierung

Zeigen Sie für Einteilchen Operatoren, dass die Summe von Einteilchen Hamiltonians in erster Quantisierung

$$\hat{H}^1 = \sum_{i=1}^N \hat{h}(\mathbf{x}_i) \quad (1)$$

in zweiter Quantisierung für Fermionen in folgender Form geschrieben werden kann

$$\hat{H}^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} \int d\mathbf{x} \phi_i^*(\mathbf{x}) \hat{h}(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) a_i^\dagger a_j \quad (2)$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor: Wählen Sie zwei beliebige Basiselemente $|\Phi_b\rangle$ und $|\Phi_c\rangle$ die aus der gleichen Basis orthonormalen Einteilchenfunktionen konstruiert wurde. Zeigen Sie dann, dass für alle Fälle $\langle \Phi_b | H^1 | \Phi_c \rangle$ und $\langle \Phi_b | H^2 | \Phi_c \rangle$ das gleiche ergeben. Dabei können Sie die folgender Identität für beliebige Vielteilchenoperatoren B benutzen

$$\int d^N x \Phi_b^* \hat{B} \Phi_c = \sqrt{N!} \int d^N \mathbf{x} \Phi_b^*(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \hat{B} \phi_{c_1}(\mathbf{x}_1) \cdots \phi_{c_N}(\mathbf{x}_N). \quad (3)$$

Bemerkung: auch wenn der Fall in der Aufgabe nur für Fermionen gezeigt wird, sind die Formeln für den Übergang von erster in zweiter Quantisierung für Bosonen gleich.