

Prof. Dr. Sabine Klapp
 Dr. Judith Lehnert,
 Dr. Marten Richter,
 Dr. Torben Winzer

8. Übungsblatt – Quantenmechanik II

Abgabe: Do. 17. Dezember 2015 bis 8:30 Uhr im Hörsaal

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** und **ausführliche Kommentare** zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und die Übung an!

Aufgabe 1 (9 Punkte): Zweiteilchenoperator in zweiter Quantisierung

Zeigen Sie, dass der Zweiteilchen Operator

$$\hat{H}^1 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N \hat{V}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \quad (1)$$

in zweiter Quantisierung für Fermionen in folgender Form geschrieben werden kann

$$\hat{H}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j,l,k=1}^{\infty} \int \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \phi_i^*(\mathbf{x}) \phi_j^*(\mathbf{x}') \hat{V}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \phi_l(\mathbf{x}) \phi_k(\mathbf{x}') a_i^\dagger a_j^\dagger a_k a_l \quad (2)$$

Gehen Sie dabei analog zur Aufgabe 2 von Blatt 6 vor.

Aufgabe 2 (11 Punkte): Paarverteilungsfunktion für Fermionen

Berechnen Sie die Paarverteilungsfunktion $g_{\sigma\sigma'}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ zwischen einem Teilchen mit Spin σ am Ort \mathbf{r} und einem mit Spin σ' bei \mathbf{r}' . $g_{\sigma\sigma'}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ ist definiert durch:

$$\left(\frac{n}{2}\right)^2 g_{\sigma\sigma'}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \langle \phi_0 | \Psi_\sigma^+(\mathbf{r}) \Psi_{\sigma'}^+(\mathbf{r}') \Psi_{\sigma'}(\mathbf{r}') \Psi_\sigma(\mathbf{r}) | \phi_0 \rangle, \quad (3)$$

dabei ist n die Teilchendichte, $|\phi_0\rangle$ der Hartree-Fock Grundzustand und

$$\Psi_\sigma^{(+)}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}}^{(*)}(\mathbf{r}) a_{\sigma\mathbf{k}}^{(+)} \quad (4)$$

ist die Spinkomponente des Feldoperators, welche ein Teilchen mit Spin σ am Ort \mathbf{r} erzeugt/vernichtet. Die Zustände seien durch

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (5)$$

gegeben. Nutzen Sie die Vertauschungsrelationen für Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren und unterscheiden Sie die folgenden beiden Fälle:

(a) $\sigma \neq \sigma'$: Zeigen Sie, dass $g_{\sigma\sigma'}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 1$ gilt.

(b) $\sigma = \sigma'$: Zeigen Sie, dass

$$g_{\sigma\sigma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 1 - \left(3 \frac{\sin(k_F R) - k_F R \cos(k_F R)}{k_F^3 R^3} \right)^2 \quad (6)$$

mit $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ gilt. Begründen und benutzen Sie hierzu die Beziehung zwischen k_F und der Teilchendichte. Plotten/skizzieren und interpretieren Sie dieses Ergebnis.