Prof. Dr. Harald Engel
Dipl. Phys. Jakob Löber

1. Übungsblatt – Nichtlineare Dynamik und Strukturbildung

Abgabe: Do. 29.10.2015 vor der Vorlesung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte. Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen.

Aufgabe 1 (20 Punkte): *Thermokonvektion, Lorenz-Gleichungen*

Aus den hydrodynamischen Gleichungen für die Konvektion einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeitsschicht leitete Edward Lorenz [J. Atmos. Sci. 20, 130 (1963)] näherungsweise folgendes System aus drei gekoppelten nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen ab:

$$\frac{du\left(t\right)}{dt} = -\sigma u\left(t\right) + \sigma v\left(t\right), \tag{1}$$

$$\frac{dv\left(t\right)}{dt} = -v\left(t\right) + ru\left(t\right) - u\left(t\right)w\left(t\right), \tag{2}$$

$$\frac{dw\left(t\right)}{dt} = -bw\left(t\right) + u\left(t\right)v\left(t\right). \tag{3}$$

Hier bezeichnen u, v und w die dimensionslosen Amplituden von Fourier-Moden, die proportional zur Konvektionsgeschwindigkeit, zur Temperaturdifferenz zwischen aufsteigender und absinkender Flüssigkeit bzw. zur Abweichung vom linearen Temperaturprofil des Wärmeleitungsregimes sind. Die Bedeutung der Parameter wird im Paper erörtert (S. 134-135).

1. Zeigen Sie, dass das Phasenvolumen für das Lorenz-System mit konstanter Rate $-(\sigma+b+1)$ kontrahiert.

2. Bestimmen Sie die Fixpunkte des Lorenz-Systems und diskutieren Sie deren Stabilität bzgl. infinitesimal kleiner Störungen der Anfangsbedingungen in Abhängigkeit vom Bifurkationsparameter r für $\sigma = 10$ und $b = 8/3$.

3. Beweisen Sie folgende Behauptung: Der Lorenz-Attraktor wird im Phasenraum durch eine Kugel mit Mittelpunkt bei $(0, 0, r+\sigma)^T$ und Radius R (zunächst beliebig) umschlossen. Erläutern Sie die Bedeutung der Aussage in Bezug auf das Verhalten der Trajektorien im System.

4. Numerische Integration: Lorenz hat seine Gleichungen für $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28 > r_T = \frac{470}{19} \approx 24,74$ numerisch integriert. Plotten Sie die Fixpunkte

$$(0, 0, 0)^T, \qquad \left(\pm 6\sqrt{2}, \pm 6\sqrt{2}, 27\right)^T,$$

und genügend Trajektorien zur Visualisierung des Attraktors. Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse sehr ausführlich. Verwenden Sie zur numerischen Integration entweder Mathematica oder C/C++ mit gnuplot und fügen Sie den Quellcode Ihrer Abgabe bei.

Vorlesung:	• Dienstag 10:15 Uhr – 11:45 Uhr im EW 202 • Donnerstag 14:15 Uhr – 15:45 Uhr im EW 203
Übung:	• Mo 14:15 – 15:45 im EW 733
Webseite:	• `http://www.tu-berlin.de/?163120`
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte. • Bearbeitung eines Projekts. • Regelmäßige und aktive Teilnahme an der Übung.
Zettel:	• Ausgabe: online Fr ab 18:00 Uhr. • Abgabe: 13 Tage später vor der Vorlesung am Donnerstag. • Abgabe der Übungszettel in 2-er Gruppen.
Sprechzeiten:	• Prof. Dr. Harald Engel: Mi, 15–16 Uhr im EW 738 • Dipl. Phys. Jakob Löber : Di, 15–16 Uhr im EW 737
Literatur:	• A. S. Mikhailov, Foundations of Synergetics I. Distributed Active Systems, Springer, 1990. • P. Glansdorff, I. Prigogine, Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations, Wiley, 1971. • G. Nicolis, I. Prigogine, Self-organization in non-equilibrium systems, Wiley, 1977. • J. D. Murray, Mathematical Biology, Springer, 1989. • H. Haken, Synergetics. Introduction and Advanced Topics, Springer, 2004. • Steven H. Strogatz, Nonlinear Dynamics And Chaos: With Applications To Physics, Biology, Chemistry, And Engineering, Westview Press, 2000.