Prof. Dr. Harald Engel
Dipl. Phys. Jakob Löber

2. Übungsblatt – Nichtlineare Dynamik und Strukturbildung

Abgabe: Do. 05.11.2015 vor der Vorlesung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte. Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen.

Aufgabe 2 (20 Punkte): *Krylov-Bogoliubov averaging method*

Wir betrachten den schwach dissipativen nichtlinearen Van-der-Pol-Oszillator (mit $u_2 > 0$)

$$\ddot{x}(t) - \epsilon \left(u_1 - u_2 \omega_0^2 x(t)^2\right) \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0. \tag{1}$$

1. Überzeugen Sie sich, dass der Ansatz für reguläre Störungstheorie mit kleinem Parameter ϵ

   $$x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \tag{2}$$

   auf sogenannte säkulare Terme führt. Säkulare Terme divergieren für $t \to \infty$.

2. Leiten Sie die in der Vorlesung verwendeten störungstheoretischen Gleichungen

   $$\dot{A}(t) = \epsilon A(t) \sin^2(\psi(t)) \left(u_1 - u_2 A(t)^2 \cos^2(\psi(t))\right), \tag{3}$$
   $$\dot{\varphi}(t) = \epsilon \sin(\psi(t)) \cos(\psi(t)) \left(u_1 - u_2 A(t)^2 \cos^2(\psi(t))\right), \tag{4}$$

   mit $\psi(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$ her. Verwenden Sie den Ansatz $x(t) = \frac{A(t)}{\omega_0} \cos(\psi(t))$ und $\dot{x}(t) = -A(t) \sin(\psi(t))$.

3. Verwenden Sie zur störungstheoretischen Lösung von Gl. (3), (4) mit Anfangsbedingungen $A(t_0) = \hat{A}_0$ und $\varphi(t_0) = \hat{\varphi}_0$ einen Ansatz mit multiplen Zeitskalen der Form

   $$A(t) = A_0(t,T) + \epsilon A_1(t,T) + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right), \tag{5}$$
   $$\varphi(t) = \varphi_0(t,T) + \epsilon \varphi_1(t,T) + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right), \tag{6}$$

   mit $T = \epsilon(t - t_0)$. Ersetzen Sie $\frac{d}{dt} \to \frac{\partial}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T}$ und nehmen Sie t und T als zwei unabhängige Variablen an. Zusätzlich wird angenommen, dass $A_1(t,T)$ und $\varphi_1(t,T)$ periodisch in t mit Periode $T_0 = 2\pi/\omega_0$ sind. Lösen Sie die Gleichungen in führender Ordnung von ϵ mit den Anfangsbedingungen $A_0(t_0,T) = A(T)$ und $\varphi_0(t_0,T) = \varphi(T)$. Von t unabhängige Differentialgleichungen für $A(T)$ und $\varphi(T)$ erhalten Sie aus den Gleichungen in $\mathcal{O}(\epsilon)$ durch zeitliche Mittelung über eine Periode T_0. Lösen Sie schließlich auch die Gleichungen in $\mathcal{O}(\epsilon)$ für $A_1(t,T)$ und $\varphi_1(t,T)$ mit den Anfangsbedingungen $A_1(t_0,T) = 0$ und $\varphi_1(t_0,T) = 0$.

4. Vergleichen Sie Ihre in der letzten Teilaufgabe erhaltene analytische Approximation mit numerischen Lösungen des exakten Systems für $\epsilon = 0.1$ und $\epsilon = 3/4$ für verschiedene Anfangsbedingungen und $u_1 = u_2 = \omega_0 = 1$.

Vorlesung:	• Dienstag 10:15 Uhr – 11:45 Uhr im EW 202 • Donnerstag 14:15 Uhr – 15:45 Uhr im EW 203
Übung:	• Mo 14:15 – 15:45 im EW 733
Webseite:	• `http://www.tu-berlin.de/?163120`
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte. • Bearbeitung eines Projekts. • Regelmäßige und aktive Teilnahme an der Übung.
Zettel:	• Ausgabe: online Fr ab 18:00 Uhr. • Abgabe: 13 Tage später vor der Vorlesung am Donnerstag. • Abgabe der Übungszettel in 2-er Gruppen.
Sprechzeiten:	• Prof. Dr. Harald Engel: Mi, 15–16 Uhr im EW 738 • Dipl. Phys. Jakob Löber : Di, 15–16 Uhr im EW 737
Literatur:	• A. S. Mikhailov, Foundations of Synergetics I. Distributed Active Systems, Springer, 1990. • P. Glansdorff, I. Prigogine, Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations, Wiley, 1971. • G. Nicolis, I. Prigogine, Self-organization in non-equilibrium systems, Wiley, 1977. • J. D. Murray, Mathematical Biology, Springer, 1989. • H. Haken, Synergetics. Introduction and Advanced Topics, Springer, 2004. • Steven H. Strogatz, Nonlinear Dynamics And Chaos: With Applications To Physics, Biology, Chemistry, And Engineering, Westview Press, 2000.