

## 1. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie I

**Abgabe: Montag 07.11.16** vor der Übung

### **Aufgabe 1 (3 Punkte): Symmetrieeigenschaften von Tensoren**

Zeigen Sie, dass für einen Tensor  $T_{\alpha\beta\gamma}$  3. Stufe gilt:

- (i) Wenn  $T_{\alpha[\beta\gamma]} = 0$  und  $T_{(\alpha\beta)\gamma} = 0$  gilt, dann ist  $T_{\alpha\beta\gamma} = 0$ .
- (ii) Wenn  $T_{[\alpha\beta]\gamma} = 0$ , dann ist  $T_{(\alpha\beta\gamma)} = \frac{1}{3}(T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta})$ .
- (iii) Wenn  $T_{(\alpha\beta)\gamma} = 0$ , dann ist  $T_{[\alpha\beta\gamma]} = \frac{1}{3}(T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta})$ .

### **Aufgabe 2 (2 Punkte): Eigenschaften von Tensoren unter Transformationen**

- a) Zeigen Sie unter Benutzung der Transformationsregel für Tensoren und der Definitionen des symmetrischen Anteils eines Tensors  $T_{\alpha\beta}$ , dass der symmetrische Anteil des transformierten Tensors  $T'_{\alpha\beta}$  nur eine Funktionen des symmetrischen Anteils des nicht-transformierten Tensors  $T_{\alpha\beta}$  sind.
- b) Zeigen Sie, dass diese Eigenschaft auch für den total antisymmetrischen Anteil  $T_{[\alpha\beta\gamma]}$  eines Tensors  $T'_{\alpha\beta\gamma}$  gilt.

### **Aufgabe 3 (5 Punkte): Symmetrieeigenschaften von Tensoren**

- a) Zeigen Sie, dass für einen Tensor 4. Stufe mit der Eigenschaft  $T_{\alpha\beta\gamma\delta} = -T_{\beta\alpha\gamma\delta} \iff T_{(\alpha\beta)\gamma\delta} = 0$ , gilt:

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta} = T_{\gamma\delta\alpha\beta} - \frac{3}{2} (T_{[\beta\alpha\gamma]\delta} + T_{[\beta\delta\gamma]\alpha} + T_{[\delta\alpha\gamma]\beta} + T_{[\alpha\beta\delta]\gamma}) + T_{\gamma\beta(\delta\alpha)} + T_{\alpha\gamma(\delta\beta)} + T_{\beta\delta(\alpha\gamma)} + T_{\delta\alpha(\beta\gamma)} + T_{\delta\gamma(\beta\alpha)} + T_{\alpha\beta(\delta\gamma)}.$$

Beachten Sie, dass man zur Vereinfachung der ersten Klammer das Ergebnis aus Aufgabe 1 (iii) nutzen kann.

- b) Es sei  $K_{\alpha\beta\gamma\delta}$  ein beliebiger Tensor 4. Stufe mit den Symmetrieeigenschaften  $K_{(\alpha\beta)\gamma\delta} = 0$ ,  $K_{\alpha\beta(\gamma\delta)} = 0$  und  $K_{\alpha\beta\gamma\delta} = -K_{\gamma\delta\alpha\beta}$ . Wieviele unabhängige Komponenten besitzt dieser Tensor im zweidimensionalen Raum und wie lauten diese.

### **Weiteres**

T. Chrobok, Sprechstunde: Montag 12.00-14.00 EW 740. Für den Erhalt des Übungsscheines sind 50% der zu erreichenden Punkte notwendig. Die Übungen werden bitte in dreier Gruppen abgegeben.