Prof. Dr. Harald Engel
Jan Totz, Maria Zeitz, Manuel Katzer, Willy Knorr, Ché Netzer, Philip Knospe

# 11. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

**Abgabe: Bis Mo. 23.01.2017 10:00 im Briefkasten am Hintereingang des ER-Gebäudes**
*Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden sehr ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Deckblatt von der Homepage verwenden! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.*

**Aufgabe 29 (4 Punkte):** *Kapitza Pendel*

Bestimmen Sie die Gleichgewichtslagen eines Pendels, dessen Aufhängepunkt in vertikaler Richtung mit hoher Frequenz $\omega \gg \sqrt{g/l}$ und Amplitude $a$ oszilliert.

(a) Verwenden Sie die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} l^2 \dot{\phi}^2 + ml \left(g + a\omega^2 \cos \omega t\right) \cos \phi$$

um das effektive Potential $U_{eff}$ zu bestimmen.

(b) Für welche Oszillationsfrequenzen $\omega$ sind die Gleichgewichtslagen stabil?

**Aufgabe 30 (10 Punkte):** *Anharmonischer Oszillator*

In der Vorlesung wurde der periodisch getriebene, schwach gedämpfte anharmonische Oszillator diskutiert:

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \Omega t - \alpha x^2 - \beta x^3.$$

In Resonanznähe $\omega_0 \approx \Omega$ ist die Oszillationsamplitude $b$ der anharmonischen Schwingung frequenzabhängig:

$$b^2 \left[ \left(\epsilon - \chi b^2\right)^2 + \gamma^2 \right] = \frac{f^2}{4m^2 \omega_0^2}.$$

Für große Anregungsamplitude $f$ existiert ein bistabiler Bereich in dem zwei unterschiedliche Oszillationsamplituden $b$ koexistieren.

(a) Bestimmen Sie die Grenzen des Bistabilitätsbereiches. Nutzen Sie den besonderen Wert der Steigung der Tangenten an den Bereichsgrenzen.

(b) Bestimmen Sie das Maximum der Schwingungsamplitude $b(\epsilon)$.

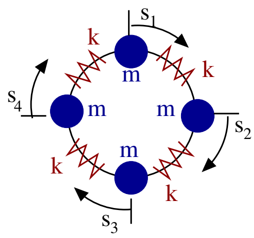
(c) Bestimmen Sie die kritische Anregungsamplitude $f_{cr}$ bei deren Überschreitung Bistabilität auftritt.

**Bitte Rückseite beachten!**$\longrightarrow$

11. Übung WS16/17

**Aufgabe 31 (6 Punkte):** *Gekoppelte Massenpunkte auf einem Kreis*

Vier Massenpunkte der Masse $m$ bewegen sich auf einem Kreis mit Radius $R$. Jeder Massenpunkt ist mit den beiden jeweils benachbarten Massenpunkte über eine Feder der Federkonstante $k$ verbundenen. Verwenden Sie im Folgenden als Koordinaten die Bogenlängen $s_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, wobei $s_i$ den Abstand der $i$ten Masse von ihrer Gleichgewichtslage beschreibt.




(a) Stellen Sie die gekoppelte Bewegungsgleichungen für die vier Massepunkte auf. Formulieren Sie diese in Matrixform: $\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{M}\mathbf{s}$, wobei $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3, s_4)^T$ und $\mathbf{M}$ eine Matrix ist, deren Koeffizienten sich aus der Bewegungsgleichung ergeben.

(b) Lösen Sie nun das lineare Differentialgleichungssystem $\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{M}\mathbf{s}$, indem Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathbf{M}$ bestimmen. Die negativen Eigenwerte von $\mathbf{M}$ sind gerade die Quadrate der Eigenfrequenzen. Warum? Zeigen Sie so, dass für die Eigenfrequenzen gilt

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^2 = 4\frac{k}{m}, \quad \omega_3^2 = \omega_4^2 = 2\frac{k}{m}. \tag{1}$$

(c) Interpretieren Sie das Ergebnis, indem Sie die Eigenschwingungen (also die Eigenvektoren von $\mathbf{M}$) zur jeder der oben gegeben Frequenzen betrachten. Überlegen Sie also für jeden der vier Fälle, welche Massen gleichphasig und welche gegenphasig schwingen.

**Hinweis:** Wer möchte darf gerne die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathbf{M}$ mit Mathematica berechnen. Bitte, dann den Mathematica Ausdruck der Lösung beilegen.

| | |
|---|---|
| Vorlesung: | • Dienstag 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202.<br>• Mittwoch 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202. |
| Webseite: | • Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der TU Webseite mit Direktzugang: 176875 |
| Scheinkriterien: | • Mindestens 50% der Übungspunkte.<br>• Bestandene Klausur. |

Bemerkung: Bei den Übungsaufgaben werden nur Originalabgaben akzeptiert. Keine Kopien oder elektronischen Abgaben. Bei Programmieraufgaben ist verwendeter Code ausgedruckt mit abzugeben.