Prof. Dr. Harald Engel
Jan Totz, Maria Zeitz, Manuel Katzer, Willy Knorr, Ché Netzer, Philip Knospe

5. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: Bis Mo. 28.11.2016 10:00 im Briefkasten am Hintereingang des ER-Gebäudes
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Deckblatt von der Homepage verwenden! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Aufgabe 12 (5 Punkte): *Rotationsparaboloid*

Gegeben sei ein Massenpunkt mit Masse m, der sich auf der Innenseite eines Rotationsparaboloiden $z(x, y) = a(x^2 + y^2), a \in \mathbb{R}^+$ unter Gravitationseinfluss $\underline{F}_G$ bewegt.

a) Bestimmen Sie die generalisierten Koordinaten und stellen Sie die Lagrangefunktion L auf.

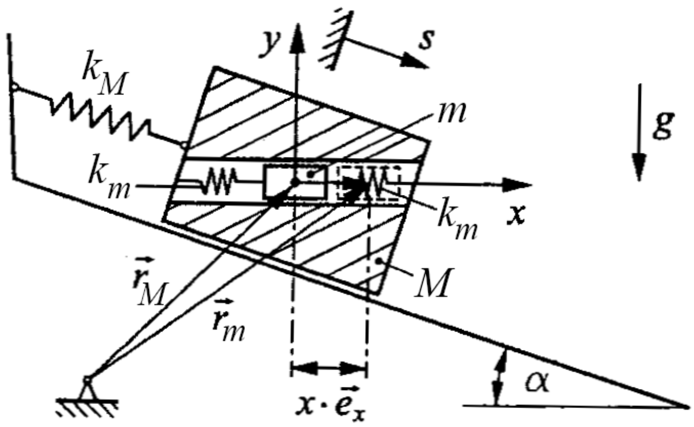
b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Euler-Lagrange Gleichungen. Diskutieren Sie die vorliegenden Symmetrien und Erhaltungsgrößen.

c) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen numerisch und plotten Sie Ihre Ergebnisse.

Bonus: Erstellen Sie eine Animation der Trajektorie (Einreichen per Email).

Aufgabe 13 (5 Punkte): *Ineinander geschachtelte Oszillatoren*

Ein Block der Masse M oszilliert reibungsfrei auf einer um den Winkel α gekippten Ebene. In dem Block befindet sich ein kleinerer Block der Masse m, der aufgrund von 2 Federn mit Federkonstanten k_m eine oszillatorische Bewegung durch den Schwerpunkt des größeren Blockes vollführt. Auf beide Blöcke wirkt die Schwerkraft $\underline{F}_G$



- Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion des Systems und stellen sie die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen auf.

- *Bonus*: Lösen Sie die Gleichungen numerisch und erstellen Sie eine Animation der Bewegungen (per Email einreichen).

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 14 (10 Punkte): *Variation in mehreren Dimensionen: hängende Membran*
Wir betrachten eine elastische Membran, die in einer Berandung R in der x-y-Ebene eingespannt sei. Kleine Auslenkungen der Membran aus dieser Ebene werden durch eine Funktion $z(x,y,t)$ beschrieben und bewirken eine zusätzliche Spannung der Membran, die zu einer Flächenstreckung führen. Die Arbeit, die dabei verrichtet wird, ist proportional zur Flächenänderung. Dies führt zur Gleichung

$$V[z,t] = \int_G \left\{ \frac{1}{2}\tau^2 \left[\left(\frac{\partial z(x,y,t)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z(x,y,t)}{\partial y} \right)^2 \right] + g\rho z(x,y,t) \right\} dx\, dy$$

für die potentielle Energie der Membran im Schwerefeld. G sei dabei das von R berandete Gebiet in der Ebene, τ die Spannung der Membran in der Ruhelage und ρ die Flächendichte der Membran. Die kinetische Energie der Membran ist gegeben durch

$$T[z,t] = \int_G \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial z(x,y,t)}{\partial t} \right)^2 dx\, dy.$$

1. Das Wirkungsfunktional, das für die Membran resultiert, hat die Form

   $$S[z] := \int_{t_0}^{t_1} \left(T[z,t] - V[z,t] \right) dt.$$

   Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichung für die Membran von der Form

   $$\Delta z(x,y,t) - \frac{\rho}{\tau^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} z(x,y,t) = \frac{g\rho}{\tau^2}$$

   ist. Benutzen Sie dazu die in der VL hergeleiteten Euler-Lagrange-Gl. für mehrere Dimensionen.

2. Lösen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für den statischen Fall im kreisförmigen Gebiet $G = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Wählen Sie die Integerationskonstanten so, dass z stetig ist, und die Randbedingung erfüllt.
   Hinweis: *Der Laplace-Operator ist in Polarkoordinaten für eine Funktion, die nicht von ϕ abhängt, gegeben durch*

   $$\Delta z(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial z(r)}{\partial r} \right).$$

Vorlesung:	• Dienstag 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202. • Mittwoch 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202.
Webseite:	• Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der TU Webseite mit Direktzugang: 176875
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte. • Bestandene Klausur.

Bemerkung: Bei den Übungsaufgaben werden nur Originalabgaben akzeptiert. Keine Kopien oder elektronischen Abgaben. Bei Programmieraufgaben ist verwendeter Code ausgedruckt mit abzugeben.