

5. Das Zwei-Körper-Problem

5.1 Problemstellung, Lagrange-Funktion, Relativbewegung (Zentralfeld), Integrale der Bewegung, Bahnkurven

Betrachtet werden zwei Punktmassen m_1 und m_2 an den Orten $\underline{r}_1(t)$ und $\underline{r}_2(t)$, die über eine abstandsabhängige Kräfte wechselwirken und ansonsten keinen weiteren Kräften wie äußeren Feldern, Reibungskräften usw. ausgesetzt sind.

Die Lagrange-Funktion lautet

$$\underline{L}(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dot{\underline{r}}_1, \dot{\underline{r}}_2) = \frac{m_1}{2} \dot{\underline{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\underline{r}}_2^2 - U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|);$$

sie ist verschiebungs- und rotationsinvariant sowie nicht explizit zeitabhängig. $U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)$ beschreibt eine beliebige, allerdings nur vom Abstand abhängende Wechselwirkungsenergie zwischen beiden Punktmassen.

Um die Bahnkurven $\underline{r}_1(t)$ und $\underline{r}_2(t)$ zu berechnen, führen wir zunächst Schwerpunkts- und Relativkoordinaten $\underline{R}(t)$ bzw. $\underline{r}(t)$ ein

$$\underline{R}(t) := \frac{m_1 \underline{r}_1(t) + m_2 \underline{r}_2(t)}{M}, \quad \underline{r}(t) := \underline{r}_1(t) - \underline{r}_2(t), \quad M := m_1 + m_2 \text{ ist die Gesamtmasse.}$$

Sind die Abhängigkeiten $\underline{R}(t)$ und $\underline{r}(t)$ bekannt, dann lassen sich $\underline{r}_1(t)$ und $\underline{r}_2(t)$ über

$$\underline{r}_1(t) = \underline{R}(t) + \frac{m_2}{M} \underline{r}(t) \quad \text{und} \quad \underline{r}_2(t) = \underline{R}(t) - \frac{m_1}{M} \underline{r}(t) \quad (\text{H0})$$

bestimmen.

Nach einfachen algebraischen Umformungen finden wir für die transformierte Lagrange-Funktion

$$L(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, \dot{\underline{R}}) = \frac{M}{2} \dot{\underline{R}}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\underline{r}}^2 - U(r), \quad \mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ ist die sogenannte } \underline{\text{reduzierte Masse}}.$$

Da \underline{R} eine zyklische Variable ist, folgt

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{R}}} \right) = 0 \quad \text{also} \quad M \dot{\underline{R}}(t) = M \frac{m_1 \dot{\underline{r}}_1(t) + m_2 \dot{\underline{r}}_2(t)}{M} = \underline{p}_1(t) + \underline{p}_2(t) = \underline{P} = \text{const.}$$

Der Gesamtimpuls \underline{P} ist Integral der Bewegung und der Schwerpunkt der beiden Punktmassen bewegt sich geradlinig-gleichförmig. Dieses Ergebnis haben wir wegen der Homogenität des Raumes im Fall des Zwei-Körperproblems von vornherein erwartet. Wir legen den Koordinatenursprung in den Schwerpunkt und befassen uns fortan nur noch mit der Relativbewegung der beiden Punktmassen.

Die Lagrange-Funktion der Relativbewegung

$$L(\underline{r}, \dot{\underline{r}}) = \frac{\mu}{2} \dot{\underline{r}}^2 - U(r)$$

beschreibt eine dreidimensionale Bewegung eines fiktiven Teilchens der Masse μ im Zentralfeld $U(r)$. Wegen dieser Zentralsymmetrie wählen wir sphärische Koordinaten $\underline{r} = (r, \vartheta, \varphi)^T$, also $\dot{\underline{r}} = (\dot{r}, r \dot{\vartheta}, r \sin \vartheta \dot{\varphi})^T$, und erhalten

$$L(r, \vartheta, \dot{r}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = \frac{\mu}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \right) - U(r).$$

In die Lagrange-Funktion geht φ nicht explizit ein. Also ist φ zyklisch und aus $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ folgt

$$p_\varphi := \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta = \text{const} =: L_z. \quad (\text{H1})$$

p_φ ist der Drehimpuls der Relativbewegung. Die Drehimpulserhaltung ist Folge der Zentralsymmetrie und gilt für beliebige $U(r)$. Als Konsequenz aus der Drehimpulserhaltung

sind alle Bahnkurven bei Bewegung im Zentralfeld eben. Der Drehimpuls steht senkrecht auf der Bahnebene.

Die Konstante L_z in (H1) ist die z-Komponente des Drehimpulses, wie auf verschiedenen Wegen leicht überprüft werden kann:

$$L_z = \dots \left\{ \begin{array}{l} \mu(x\dot{y} - \dot{x}y); \quad x = r \sin\vartheta \cos\varphi, y = r \sin\vartheta \sin\varphi \\ \mu(\underline{r} \times \dot{\underline{r}}); \quad \underline{r} = r \underline{e}_r, \dot{\underline{r}} = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\vartheta} \underline{e}_\vartheta + r \sin\vartheta \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi \end{array} \right\} \dots = \mu r^2 \dot{\varphi} \sin^2\vartheta$$

Bem.: Die Lagrange-Gleichung für ϑ

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \vartheta} \right) = \frac{d}{dt} (\mu r^2 \dot{\vartheta}) - \mu r^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \dot{\varphi}^2 = \mu (2r \dot{r} \dot{\vartheta} + r^2 \ddot{\vartheta} - r^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \dot{\varphi}^2) = 0$$

hat für die speziellen Anfangsbedingungen $\vartheta(t = t_0) = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\vartheta} \Big|_{t=t_0} = 0$ die Lösung $\vartheta(t) = \frac{\pi}{2}$.

Es lohnt sich also, die z-Achse in Richtung von \underline{L} zu orientieren, dann ist die Bahnebene der Relativbewegung die x-y-Ebene, L_x und L_y sind Null und wir können L_z durch L ersetzen. In diesem Fall ist dann

$$L = \mu r^2 \dot{\varphi} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{L}{\mu r^2(t)}. \quad (\text{H2})$$

Es ist somit sinnvoll, die Relativbewegung durch ebene Polarkoordinaten (r, φ) in der Bahnebene senkrecht zum Drehimpuls \underline{L} zu beschreiben, d.h. mit der Lagrange-Funktion

$$L(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r).$$

(an der Tafel steht für die Lagrange-Funktion immer ein geschwungenes L , das nicht mit dem Betrag des Drehimpulses verwechselt werden kann).

Die Lagrange-Gleichung für φ gibt wegen $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ und $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \dot{\varphi}$ wieder (H2).

Aus der Lagrange-Gleichung für r , $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial r}\right) = 0$, folgt mit $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{d}{dt}(\mu \dot{r}) = \mu \ddot{r}$ und

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \mu r \dot{\phi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} = \mu r \dot{\phi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} \text{ die Bahngleichung}$$

$$\mu \ddot{r} = \mu r \dot{\phi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} \stackrel{(H2)}{=} - \frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial r} \text{ mit } U_{\text{eff}}(r) := U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}. \quad (H3)$$

Nach der Einführung des effektiven Potentials ist das Zwei-Körper-Problem im dreidimensionalen Raum auf die eindimensionale Bewegung eines fiktiven Teilchens der Masse μ in einem äußeren Feld $U_{\text{eff}}(r)$ zurückgeführt worden, dessen zweiter Term häufig als Fliehkraftbarriere bezeichnet wird.

Bei gegebenem $U(r)$ lassen sich die möglichen Bahnkurven anhand des grafischen Verlaufes von $U_{\text{eff}}(r)$ einfach qualitativ diskutieren. Beispiele: $U(r) \sim r^{-1}$, $U(r) \sim r^2$ usw., vgl. MMP.

Für die Bewegung entsprechend (H3) gilt Energieerhaltung:

$$\frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = \text{const} =: E. \quad (H4)$$

Formal folgt diese physikalisch sofort einleuchtende Beziehung aus der Tatsache, dass die Lagrange-Funktion $L(r, \dot{r}, \dot{\phi})$ wie schon $L(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dot{\underline{r}}_1, \dot{\underline{r}}_2)$ nicht explizit von der Zeit abhängt

und deshalb (vgl. Kap. 2.4) $\dot{r} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \dot{\phi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - L$ ein Integral der Bewegung ist. Dass dieses

Bewegungsintegral gleich der Energie E des Systems ist, möge jeder selbst durch einfache Rechnung verifizieren.

Zur Berechnung der Bahnkurve $r(t)$ müssen wir nicht die Bahngleichung (H3) lösen. Aus dem Energieerhaltungssatz (H4) erhalten wir

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}})}, \text{ nach Trennung der Variablen } dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}})}} \text{ und daraus}$$

$$t(r) = \int_{t_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu}[E - U_{\text{eff}}(r)]}} + t_0, \quad t(r_0) = t_0. \quad (\text{H5})$$

Ist die Funktion $t(r)$ invertierbar, so lässt sich mit Hilfe von (H2) auch $\varphi(t)$ berechnen

$$\varphi(t) = \frac{L_z}{\mu} \int_{t_0}^t \frac{dt'}{r^2(t')} + \varphi_0, \quad \varphi(t_0) = \varphi_0, \quad (\text{H6})$$

vorausgesetzt, es gelingt, die Integral in (H5) und (H6) für gegebenes $U(r)$ zu lösen und $r(t)$ zu bestimmen. (H5) (nach Invertierung) und (H6) ergeben die Bahnkurven der Relativbewegung in ebenen Polarkoordinaten als Funktion der Zeit. Die Bewegungen der Punktmassen m_1 und m_2 folgen dann durch Rücktransformation entsprechend (H0).

Alternativ können wir die Bahnkurve $\varphi(r)$ in der Bahnebene ausrechnen. Aus

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{dr} \stackrel{(\text{H2}, \text{H5})}{=} \frac{L}{\mu r^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}})}}$$

folgt

$$\varphi(r) = L \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{2\mu[E - U_{\text{eff}}(r')]} + \varphi_0 = L \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{2\mu[E - U(r')] - \frac{L^2}{r'^2}}} + \varphi_0. \quad (\text{H7})$$

Energie E , der Betrag des Drehimpulses L sowie $\varphi_0 = \varphi(r_0)$ werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt.

Diese Bahnkurven der finiten Bewegung sind i.a. Rosettenbahnen in einem Kreisring zwischen r_{\min} und r_{\max} [L^2 , § 14.7]. Bei einmaligem Durchlaufen der Folge $r_{\min} \rightarrow r_{\max} \rightarrow r_{\min}$ ändert sich der Winkel φ um (vgl. Skizze)

$$\Delta\varphi = 2 L \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{2\mu[E - U(r')] - \frac{L^2}{r'^2}}}.$$

Die Bahnkurven sind geschlossen, wenn die Winkeländerung nach n Durchläufen ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist, $\Delta\varphi$ also ein rationaler Teil von 2π ist:

$$\text{geschlossene Bahnkurven: } \Delta\varphi = 2\pi \frac{m}{n}, \quad m, n - \text{ganze Zahlen} \leftrightarrow U(r) \sim \begin{cases} r^{-1} \rightarrow \Delta\varphi = 2\pi \\ r^2 \rightarrow \Delta\varphi = \pi \end{cases}.$$

Diese Bedingung ist nur für das Gravitationspotenzial und den (3d) harmonischen Oszillator erfüllt. Für alle anderen Potentiale $U(r)$ sind m und n inkommensurabel (in keinem rationalen Verhältnis stehend), so dass die Bahnkurve die Fläche des Kreisrings $r_{\min} < r < r_{\max}$ für $t \rightarrow \infty$ vollständig überstreicht.

Für einen sogenannten "Sturz in das Zentrum" bei der Bewegung im Zentralfeld muss die Zentralfeldbarriere überwunden werden. Aus der Bedingung $r^2 U(r) + L^2/2\mu < r^2 E$ für die klassisch erlaubte Bewegung folgt, dass $r \rightarrow 0$ nur für $\lim_{r \rightarrow 0} r^2 U(r) < -L^2/2\mu$ möglich ist, also

$$\text{Sturz ins Zentrum: für } \lim_{r \rightarrow 0} U(r) \propto \begin{cases} -\frac{\alpha}{r^2} & \text{mit } \alpha > \frac{L_z^2}{2\mu} \\ -\frac{1}{r^n} & \text{mit } n > 2 \end{cases}.$$

5.2 Explizite Bestimmung der Bahnkurven für zwei gravitativ wechselwirkende Punktmassen ($U(r) = \alpha/r$, $\alpha = \text{const}$).

Eine qualitative Diskussion der klassisch erlaubten Bewegung unter Berücksichtigung des Energieerhaltungssatzes (H4) führt auf elliptische ($E_{\min} < E < 0$) oder kreisförmige ($E_{\min} = E$) Bahnkurven der finiten Bewegung und auf Hyperbelbahnen der infiniten Bewegung ($0 < E$).

Für die explizite Berechnung der Bahnkurven $r(\varphi)$ müssen wir nicht die Bahngleichung (H3) integrieren, sondern können vom Energieerhaltungssatz (H4) ausgehen. Unter Verwendung

$$\text{von } \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{L}{\mu r^2} \quad \text{folgt} \quad \frac{\mu}{2} \frac{L^2}{\mu^2 r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \gamma \frac{\mu M}{r} = E.$$

$$\text{Wir substituieren } u(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)}, \quad \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -u^2 \frac{dr}{d\varphi}, \quad \text{also} \quad \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi}$$

und finden

$$\frac{L^2}{2\mu} u^4 \frac{1}{u^4} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + \frac{L^2}{2\mu} u^2 - \gamma \mu M u = E \quad \xrightarrow{\cdot 2\mu/L^2} \quad \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 - \frac{2\gamma \mu^2 M}{L^2} u = \frac{2\mu E}{L^2}.$$

$$\text{Über die quadratische Ergänzung folgt } \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + \left(u - \frac{\gamma \mu^2 M}{L^2} \right)^2 = \frac{2\mu E}{L^2} + \frac{\gamma^2 \mu^4 M^2}{L^2} \text{ und}$$

nach Multiplikation mit $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{p} \right)^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{2\mu E}{L^2} + \frac{1}{p^2} \right)}_{E_{HO} = \frac{A^2}{2}}, \quad \frac{1}{p} := \frac{\gamma \mu^2 M}{L^2}, \quad (\text{H8})$$

wobei wir den Bahnparameter p eingeführt haben.

Formal ist (H8) dem Energieerhaltungssatz eines harmonischen Oszillators äquivalent. In dieser Analogie beschreibt der erste Term auf der linken Seite die kinetische Energie (u -Auslenkung des Schwingers, φ - Zeit, Masse gleich Eins) und der zweite Term die potentielle Energie (Federkonstante gleich Eins, Auslenkungen um die Ruhelage $1/p$). In der von uns gewählten Interpretation ist der Term auf der rechten Seite von (H8) dann die Energie E_{HO} des fiktiven harmonischen Oszillators, die sich über $E_{HO} = A^2/2$ durch die Amplitude A

$$A := \sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \frac{1}{p^2}} = \frac{1}{p} \sqrt{1 + \frac{2\mu E}{L^2} p^2} = \frac{1}{p} \sqrt{1 + \frac{2\mu E}{L^2} \frac{L^2}{\gamma^2 \mu^4 M^2}} = \frac{1}{p} \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\gamma^2 \mu^3 M^2}} = \frac{\varepsilon}{p}$$

der harmonischen Schwingung $u(\varphi) - \frac{1}{p} = A \cos(\varphi - \varphi_0)$ ausdrücken lässt. Dabei haben wir

die Abkürzung $\varepsilon := \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\gamma^2 \mu^3 M^2}}$ verwendet. Über die Rücktransformation $r(\varphi) = \frac{1}{u(\varphi)}$

erhalten wir mit $A = \varepsilon / p$ schließlich die gesuchte Bahnkurve der Relativbewegung

$$\underline{r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad p = \frac{L^2}{\gamma \mu^2 M}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\gamma^2 \mu^3 M^2}}.} \quad (\text{H9})$$

(H9) ist die Darstellung der Kegelschnitte in Polarkoordinaten. Der Parameter ε bestimmt die Exzentrizität der Bahnkurven in Abhängigkeit von Energie und Drehimpuls der Bewegung.

Fallunterscheidung:

(i) $E < 0$ ($\varepsilon < 1$) \rightarrow finite Bewegung:

Bahnkurven sind Ellipsen mit M in einem der Brennpunkte. Da $\cos(\varphi - \varphi_0) = \left(\frac{p}{r} - 1\right) \frac{1}{\varepsilon}$

zwischen +1 und -1 liegen muss, gilt $\underline{r_{\min} = \frac{p}{1 + \varepsilon} < r < \frac{p}{1 - \varepsilon} = r_{\max}}$.

• Kepler'sche Gesetze (Prag, um 1610, Kopernikanisches Weltbild)

1. Gesetz: Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht (H9).

2. Gesetz: Ein Leitstrahl von der Sonne zu einem Planeten überstreicht in gleichen Zeitintervallen gleichgroße Flächen.

Aus $\frac{L}{2\mu} = \frac{1}{2} |\underline{r} \times \dot{\underline{r}}|$ folgt für die in dt überstrichene Fläche $\frac{1}{2} |\underline{r} \times \dot{\underline{r}}| dt = \frac{L}{2\mu} dt \sim dt$, da der

Drehimpuls L konstant ist.

3. Gesetz: Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen ihrer Ellipsen $\frac{T^2}{a^3} = \text{const.}$

Integration von $\frac{1}{2} |\underline{r} \times \dot{\underline{r}}| dt = \frac{L}{2\mu} dt$ über einen Umlauf $\int_0^T dt$ mit der Periode T führt auf der

rechten Seite zu $\frac{L}{2\mu} T$; auf der linken Seite ergibt sich die Fläche der Ellipse, also $\pi a b$,

wobei a und b die große bzw. kleine Halbachse bezeichnen. Insgesamt folgt $T = \frac{2\mu \pi a b}{L}$.

Also ist

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 \mu^2 b^2}{L^2 a} = \dots = \frac{4\pi^2}{\gamma M} \quad (\text{überprüfen})$$

Es gilt $a^2 = b^2 + a^2 \varepsilon^2$; aus $r(\varphi = 0) = a(1 - \varepsilon) = \frac{p}{1 + \varepsilon}$ folgt $a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}$ und $b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$.

(i) $E > 0$ ($\varepsilon > 1$) → infinite Bewegung ("Streuzustand")

Die Bahnkurven der infiniten Bewegung sind Hyperbeln. Das fiktive Teilchen mit der Masse μ nähert sich aus dem Unendlichen kommend auf einer für hinreichend große r annähernd geraden Bahn dem Zentrum des Gravitationsfeldes, wird abgelenkt (→ gestreut) und entfernt sich wieder Richtung Unendlich. Der Streuwinkel χ ist abhängig von Energie und

Drehimpuls. Aus $\chi = 2\varphi_\infty - \pi$ und $1 + \varepsilon \cos \varphi_\infty = 0$, also $\varphi_\infty = \pi/2 + \arcsin(1/\varepsilon)$, folgt

$$\chi = 2 \arcsin \frac{1}{\varepsilon}.$$

Bem.: In diesem Kapitel haben wir den Ausdruck für das Gravitationspotenzial

$$\phi(r) = \alpha/r = -\gamma \frac{M}{r}$$

als gegeben betrachtet und die Bahnkurven bestimmt. Newton hat aus den elliptischen Bahnkurven Kepler die Gravitationskraft als Ursache für die Bewegung abgeleitet. Diese Aufgabe haben wir bereits in den MMP gelöst.

5.3 Streuung

Wir beschäftigen uns nun etwas detaillierter mit den infiniten Relativbewegungen im Zwei-Körper-Problem im Fall von $U(r) = \alpha/r$. Im Schwerpunktsystem (Ursprung des Koordinatensystems im Schwerpunkt) wird ein fiktives Teilchen der Masse μ im

Zentralpotenzial $U_{\text{eff}}(r) := \frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$ gestreut. (Skizze)

Wir orientieren die z -Achse in Richtung der einfallenden Teilchen.

Die Bahnkurve besteht aus zwei Hyperbelästen, die symmetrisch zur Richtung $r = r_{\min}$

verlaufen, wobei $U(r_{\min}) + \frac{L^2}{2\mu r_{\min}^2} = E > 0$.

Bei $r = r_{\min}$ ist $E = U_{\text{eff}}(r_{\min})$ und $\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}})}$ wechselt sein Vorzeichen. Bis zum

Abstand A (vgl. Skizze) nimmt der Abstand zum Streuzentrum ab ($\dot{r} < 0$), danach nimmt er zu ($\dot{r} > 0$). Beide Äste unterscheiden sich lediglich im Vorzeichen von φ ; zu jedem $+\varphi(r)$ existiert ein $-\varphi(r)$. Wählen wir φ_0 so, dass $\varphi(r_{\min}) = 0$ ist, so folgt aus (H7)

$$\pm \varphi(r) = L \int_{r_{\min}}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{2\mu[E - U_{\text{eff}}(r')]} = L \int_{r_{\min}}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{2\mu \left[E - \frac{\alpha}{r'} \right] - \frac{L^2}{r'^2}}}.$$

Der **Streuwinkel** $\chi(\rho)$ bestimmt die Streurichtung vollständig; er ist vom Abstand der einfallenden Teilchen von der Streuachse, dem sogenannten Streuparameter ρ , abhängig.

Aufgrund der Rotationssymmetrie bezüglich der Strahlachse besteht keine φ -Abhängigkeit.

Wir setzen voraus, dass jedes einfallende Teilchen an maximal einem Teilchen des Targets gestreut wird (keine Mehrfachstreuung) und die einfallenden Teilchen sich nicht beeinflussen.

Unter Berücksichtigung von $E = \frac{\mu}{2} v_\infty^2 = \text{const}$ (keine Wechselwirkung mit Streuzentrum für

$r \rightarrow \infty$) und $L = \rho \mu v_\infty$ (da $\text{const} = \underline{L} = \lim_{r \rightarrow \infty} \mu \underline{r} \times \dot{\underline{r}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \mu (z \underline{e}_z + \rho \underline{e}_\perp) \times (v_\infty \underline{e}_z) = \mu \rho v_\infty \underline{e}_\perp \times \underline{e}_z$)

folgt aus (H7)

$$\varphi_\infty = L \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\mu \left[E - U(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right]}} = \int_{r_{\min}}^{\infty} dr \frac{\rho \mu v_\infty}{r^2 \sqrt{\mu^2 v_\infty^2 - 2\mu U(r) - \frac{\rho^2 \mu^2 v_\infty^2}{r^2}}} = \rho \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{U(r)}{E} - \frac{\rho^2}{r^2}}}$$

- **Streuquerschnitt**

Der einfallende Teilchenstrahl (μ, v_∞) sei homogen, die Dichte der einfallenden Teilchen n .

(Skizze).

Ringfläche $2\pi\rho d\rho$

$dN = 2\pi\rho d\rho n \rightarrow$ Anzahl der durch den Ring einfallenden Teilchen.

Teilchen in $(\rho, \rho + d\rho)$ werden unter $(\chi, \chi + d\chi)$ gestreut. Beachte: $\rho(\chi)$ ist monoton fallend,

$$\frac{d\rho}{d\chi} < 0.$$

Wir führen den Raumwinkel

$$d\Omega := \frac{dA}{r^2} = 2\pi \underbrace{r \sin \chi}_{\text{Radius der Ringzone}} \underbrace{r d\chi}_{\text{Breite der Ringzone}} \frac{1}{r^2} = 2\pi \sin \chi d\chi$$

ein und definieren den differentiellen Wirkungsquerschnitt der Streuung

Def.: $d\sigma := \frac{dN}{n} \rightarrow$ differentieller Streuquerschnitt

$$d\sigma := \frac{dN}{n} = 2\pi\rho d\rho = 2\pi\rho(\chi) \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\chi = \rho(\chi) \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| \frac{1}{\sin \chi} d\Omega.$$

Bezogen auf das Raumwinkelement $d\Omega$ zwischen zwei Kegeln mit den Scheitelwinkeln $\chi, \chi + d\chi$ folgt unter Verwendung von $d\Omega = 2\pi \sin\chi d\chi$ der Ausdruck

$$d\sigma(\Omega) = \rho(\chi) \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| \frac{1}{\sin\chi} d\Omega .$$

Er gibt den Anteil (in %) der einfallenden Teilchen an, die in $d\Omega$ gestreut werden.

Für den totalen (integralen) Streuquerschnitt ergibt sich

$$\sigma = \int \Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \int d\Omega \rho(\chi) \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| \frac{1}{\sin\chi} .$$

Dieser kann bei unabgeschirmten langreichweitigen Steupotenzialen divergieren.

■ Beispiel: Streuung im Coulomb-Potenzial. [Rutherford'sche Streuformel](#)

Ziel: Berechne den differentiellen Streuquerschnitt für die Streuung in $U(r) = \frac{\alpha}{r}$.

Es folgt (Übungsblatt)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \rho(\chi) \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| \frac{1}{\sin\chi} = \left(\frac{\alpha}{2\mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} = \left(\frac{\alpha}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} . \quad \rightarrow \text{Rutherford (1913)}$$

Rutherford schoss α -Teilchen aus natürlicher Radioaktivität mit Energien zwischen 4 und 8 MeV auf eine sehr dünne Goldfolie, damit jedes He^{2+} , wenn überhaupt, nur von einem Goldatom gestreut wird. Er bestätigte die von ihm abgeleitete Streuformel experimentell.

Bei "zentralem Stoß" mit $\rho = 0$ ($\rightarrow L = 0$) folgt mit $\alpha = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0}$ und $Z_1 = 2$ für He^{2+} ,

$Z_2 = 79$ für Gold sowie $\mu \sim m_{\text{He}^{2+}}$ für den minimalen Abstand vom Streuzentrum

$$r_{\min} \cong \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 E} \underset{E=6\text{MeV}}{\cong} 10^{-13} \text{ m} .$$

Das ist viel kleiner als der damals schon bekannte Atomradius (einige Angström). Rutherford schlussfolgerte daraus, dass der überwiegende Teil der Atommasse in einem sehr kleinen Kern konzentriert sein muss und entwickelte sein [Rutherford'sches Atommodell](#) (1913):

Atom:	positiv geladener Kern + Elektronenhülle.
↑	↑
$\varnothing \sim 10^{-10} \text{ m}$	$\varnothing \sim 10^{-14} \text{ m}$
also einige Angström	also einige Fermi ($1 \text{ f} = 10^{-15} \text{ m} = 1 \text{ fm}$)

Abgesehen vom elektrischen Feld, ist der von den Atomen eingenommene Raum nahezu leer.

Beachte: Der differentielle Streuquerschnitt der Rutherford-Streuung ist invariant gegen die Transformation $\alpha \rightarrow -\alpha$: Anziehendes und abstoßendes Coulomb-Potenzial streuen gleich. Der integrale Streuquerschnitt divergiert.

Die Streuung hochenergetischer Neutronen und Protonen hilft bei der Aufklärung der Struktur des Atomkerns.

Mit Neutronenstreuung an Festkörpern und Flüssigkeiten werden experimentell die sogenannten \rightarrow Strukturfaktoren ermittelt, aus denen die radialen Verteilungsfunktionen berechnet werden und mit Vorhersagen der Statistischen Physik von einfachen Flüssigkeiten (z.B. flüssiges Argon) verglichen werden können.