

6. Schwingungen (periodische Bewegungen)

Unterscheide • lineare von nichtlinearen Schwingungen

- konservativ nichtlineare von dissipativ nichtlinearen Schwingungen
- freie von erzwungenen Schwingungen
-

6.1 Eindimensionale Schwingungen eines Massepunkts (ein Freiheitsgrad)

Sei $x(t)$ die Auslenkung des Massepunkts der Masse m . In der $x-\dot{x}$ - Phasenebene (oder $x-p$) können die Schwingungen durch geschlossene Bahnkurven geometrisch veranschaulicht werden.

Eine typische Bewegungsgleichung hat die Form

$$\ddot{x} + \gamma(x, \dot{x})\dot{x} + \frac{dU(x)}{dx} = \frac{1}{m}F(t) \quad , \quad \text{mit der potenziellen Energie} \quad U(x) = \frac{\omega_0^2}{2}x^2 + \alpha\frac{x^3}{3} + \beta\frac{x^4}{4} \quad .$$

Dabei ist $\omega_0^2 = k/m$ die Eigenfrequenz der freien harmonischen Schwingung für $\alpha = \beta = \gamma = 0$, k die "Federkonstante", $m\gamma(x, \dot{x})$ ein orts- und geschwindigkeitsabhängige Dämpfungsfunktion und $F(t)$ eine zeitabhängige äußere Erregung. Von den Koeffizienten α und β hängt der nichtlineare Anteil der rücktreibenden Kraft ab.

■ Einige Beispiele

- freie harmonische Schwingung: $\alpha = \beta = \gamma = F = 0 \rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, $x(t) = a \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

Amplitude a und Phase φ hängen von den Anfangsbedingungen ab. Es gilt Energieerhaltung $E = m/2 \dot{x}^2 + k/2 x^2 = \text{const}$. Also sind die Bahnkurven Ellipsen in der Phasenebene, die unendlich dicht ineinander liegen, d.h., ein Kontinuum bilden.

- erzwungene, gedämpfte harmonische Schwingungen (periodische Erregung):

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos(\Omega t) \quad ,$$

$\alpha = \beta = 0$, konstanter Reibungskoeffizient $\gamma > 0$, f und Ω bezeichnen die Amplitude und Frequenz der periodischen äußeren Kraft. Ohne äußere Erregung sind die Bahnkurven Spiralen, die für $t \rightarrow \infty$ im Punkt $x = \dot{x} = 0$ enden.

- anharmonische Schwingung mit periodischer Erregung (konservative Nichtlinearität)

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = \frac{f}{m} \cos(\Omega t), \quad \alpha = 0, \quad \gamma > 0 \text{ und konstant} \rightarrow \text{Duffing-Oszillator (1918).}$$

Dieser nichtlineare Oszillator ist nach Georg Wilhelm Christian Caspar Duffing (1861-1944) benannt. Duffing ließ sich 1913 in Berlin als Erfinder und freier Schwingungswissenschaftler nieder. Er besuchte die Vorlesungen von Max Planck zur Quantenphysik und forschte an der Technischen Universität Berlin-Charlottenburg. Der periodische erregte Duffing-Oszillator hat ab 1970 als ein Paradebeispiel für deterministisch-chaotische Bewegungen eine Renaissance erlebt.

Anharmonischen Schwingungen ohne Reibung sind nichtlinear konservativ. In der Phasenebene treten Kontinua geschlossener Bahnkurven, homo- und heterokline Orbits, sowie Sattel- und Wirbelpunkte auf. Ein heterokliner Orbit besteht aus einer Separatrix zwischen zwei unterschiedlichen Sattelpunkten. Ein homokliner Orbit ist eine Separatrix, die aus einem Sattelpunkt ausläuft und in denselben Sattelpunkt einläuft (Separatrixschleife). Die Schwingungen sind strukturell instabil (erklären) und können deterministisch chaotisch werden (erklären).

- Selbsterregte Schwingungen

(H. Poincaré, Grenzyklen; A.A. Andronov, strukturelle Stabilität (1937 mit Pontriagin), 1929 Auto-Oszillationen, Autowellen).

Die Gleichung

$$\ddot{x} + \gamma(x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \rightarrow \text{van der Pol - Oszillator (1926),}$$

beschreibt selbsterregte Schwingungen. Für $\gamma > 0$ und konstant ist die Reibung für kleine Auslenkungen negativ (Oszillator nimmt Energie auf), wechselt jedoch für hinreichend große Auslenkungen das Vorzeichen, wodurch großamplitudige Schwingungen gedämpft werden. Der Oszillator ist dissipativ nichtlinear, je nach Amplitude nimmt er von außen Energie auf (er wird gepumpt) oder dissipiert Energie.

Den selbsterregten Schwingungen entsprechen isolierte geschlossenen Bahnkurven in der Phasenebene, die zuerst von Poincaré beschriebenen Grenzyklen. Die Amplitude selbsterregter Schwingungen ist unabhängig von den Anfangsbedingungen.

$$\ddot{x} + \gamma(\dot{x}^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \rightarrow \text{Rayleigh-Oszillator (1880)}$$

beschreibt selbsterregte nichtlineare Vibrationen, wurde bereits 1880 von Lord Rayleigh in seinem Buch "Theory of Sound" diskutiert. Die Differentialgleichung mit symmetrisierter Reibung

$$\ddot{x} + \gamma(\dot{x}^2 + x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \rightarrow \text{Poincaré-Oszillator}$$

beschreibt den Poincaré-Oszillator.

6.2 Eindimensionale anharmonische Schwingungen ohne Reibung

Wir untersuchen anharmonische Schwingungen mit der Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad . \quad (H1)$$

Das sind Schwingungen in der Umgebung eines Minimums x_{\min} der potenziellen Energie U , bei denen die Taylor-Entwicklung von $U(x)$ um x_{\min} nicht bereits nach dem quadratischen Term (harmonische Näherung) abgebrochen wird. Diese Schwingungen haben wir bereits zu Beginn des Kurses im Zusammenhang mit den finiten eindimensionalen Bewegungen untersucht. Dabei haben wir einen Ausdruck $T(E)$ für die Schwingungsdauer abgeleitet. Aus diesem Grunde erwarten wir, dass sich die Frequenz der gesuchten Schwingung von $\omega_0^2 = \sqrt{k/m}$ unterscheiden wird.

Unter der Voraussetzung kleiner x und \dot{x} (Energieerhaltung!) suchen wir die Lösung der Bewegungsgleichung in Form einer Reihe aufeinanderfolgender Näherungen

$$x(t) = x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t) + x^{(3)}(t) + \dots$$

Die Gleichung erster Ordnung enthält nur in $x^{(1)}$ lineare Terme

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = 0.$$

Ihre Lösung stellen wir in der Form

$$x^{(1)}(t) = a \cos(\omega t) \quad \text{mit} \quad \omega = \omega_0 + \omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \dots$$

dar. $x^{(1)}(t)$ enthält bereits die exakte, noch unbekannte Frequenz ω mit Frequenzkorrekturen $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \dots$ gegenüber der Frequenz ω_0 einer harmonischen Schwingung im Grenzfall $\alpha = \beta = 0$.

Die Anfangsphase in $x^{(1)}$ wird bei geeigneter Wahl von $x^{(1)}(t_0)$ gleich Null.

Für die zweite Ordnung der Näherung setzen wir $x = x^{(1)} + x^{(2)}$ und $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)}$ in (H1) ein und berücksichtigen nur Terme der Größenordnungen $(1), (1)^{(1)}$ und (2) sowie $x^{(1)} = a \cos(\omega t)$.

Wir erhalten

$$\ddot{x}^{(1)} + \ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 (x^{(1)} + x^{(2)}) = -\alpha (x^{(1)} + x^{(2)})^2 - \beta (x^{(1)} + x^{(2)})^3, \text{ also}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} &\cong -\ddot{x}^{(1)} - \omega_0^2 x^{(1)} - \alpha (x^{(1)})^2 \cong a [(\omega^2 - \omega_0^2)] \cos(\omega t) - \alpha a^2 \cos^2(\omega t) \cong \\ &\cong a [(\omega + \omega^{(1)})^2 - \omega_0^2] \cos(\omega t) - \alpha a^2 \cos^2(\omega t) \cong -\alpha a^2 \cos^2(\omega t) + 2\omega_0 \omega^{(1)} \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} \cong -\frac{\alpha}{2} a^2 [1 - \cos(2\omega t)] + 2\omega_0 \omega^{(1)} \cos(\omega t).$$

Wegen $\cos[(\omega_0 + \omega^{(1)})t] \cong \cos(\omega_0 t) - t \omega^{(1)} \sin(\omega_0 t)$ enthält der letzte Term auf der rechten Seite einen Beitrag, der mit wachsendem t unbegrenzt anwächst. Das würde erzwungene Schwingungen beliebig hoher Amplitude anfachen und dem Energieerhaltungssatz widersprechen. Um dieses unphysikalische Verhalten zu kompensieren, setzen wir die Frequenzkorrektur erster Ordnung $\omega^{(1)}$ gleich Null. Also ist

$$\ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} \cong -\frac{\alpha}{2} a^2 [1 - \cos(2\omega t)].$$

Diese Gleichung beschreibt eine harmonische Schwingung $x^{(2)}$ unter dem Einfluss einer periodischen Erregung mit Frequenz 2ω und Amplitude a^2 . Mathematisch handelt es sich um eine lineare inhomogene ODE zweiter Ordnung. Das bekannte Lösungsverfahren (allgemeine Lösung der homogenen + partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung) führen auf die Lösung

$$x^{(2)}(t) = -\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2} \cos(2\omega t) \sim a^2, \quad \omega = \omega_0, \quad \omega^{(1)} = 0,$$

also auf eine Oberschwingung mit doppelter Frequenz (Kombinationsschwingung zweiter Ordnung).

In dritter Ordnung setzen wir $x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)}$, $\omega = \omega_0 + \omega^{(2)}$ in (H1) ein und finden auf gleichem Wege

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = -2\alpha x^{(1)}x^{(2)} - \beta(x^{(1)})^3 + 2\omega_0 \omega^{(2)}x^{(1)}.$$

Offensichtlich ergeben sich für alle $x^{(n)}$ lineare ODE deren Inhomogenität jeweils von den Näherungen bis maximal zur Ordnung $x^{(n-1)}$ abhängen, die im Zuge der sukzessiven Approximationen bereits bestimmt wurden.

Für $x^{(3)}$ folgt unter Verwendung der Ausdrücke für $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ und der entsprechenden Additionstheoreme

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = a^3 \left(\frac{\beta}{4} - \frac{\alpha^2}{6\omega_0^2} \right) \cos(3\omega t) + a \left(2\omega_0 \omega^{(2)} + \frac{5}{6} \frac{\alpha^2}{\omega_0^2} a^2 - \frac{3}{4} \beta a^2 \right) \cos(\omega t).$$

Damit der resonante Term proportional zu $\cos(\omega t)$ auf der rechten Seite verschwindet, muss

$$\omega^{(2)} = \frac{3\beta}{8\omega_0} \left(1 - \frac{10\alpha^2}{9\omega_0^2} \right) a^2 \sim a^2 \quad \rightarrow \text{amplitudenabhängige Frequenzkorrektur} \quad (\text{H2})$$

gelten. Das ist die amplitudenabhängige Frequenzkorrektur, die wir für jede finite eindimensionale Bewegung bereits in der Form

$$T(E) = \frac{2\pi}{\omega(E)} = 2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}}$$

dargestellt hatten (erinnere: $E \sim a^2$). Die Lösung der ODE für $x^{(3)}$ lautet

$$x^{(3)} = \frac{a^3}{16\omega_0^2} \left(\frac{\alpha^2}{3\omega_0^2} - \frac{\beta}{2} \right) \cos(3\omega t) \sim a^3$$

- das ist eine Oberschwingung mit dreifacher Frequenz und Amplitude a^3 (Kombinationsschwingung 3. Ordnung).

FAZIT:

konservative Nichtlinearität
(nichtlineare rücktreibende Kraft)

Oberschwingungen
(Kombinationsschwingungen)

⇔

anharmonische Terme

amplitudenabhängige Frequenzkorrektur¹⁾ $\omega(a)$

¹⁾ außer Zykloidenpendel

6.3 Erzwungene Schwingungen. Resonanz

Eine durch die äußere Kraft $F(t)$ erregte ungedämpfte harmonische Schwingung

Bewegungsgleichung: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F(t)$, Lagrange-Funktion: $L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{k}{2} x^2 + x F(t)$

kann für beliebige $F(t)$ über

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{d}{dt}(\dot{x} + i\omega x) - i\omega(\dot{x} + i\omega x) = \frac{d\zeta}{dt} - i\omega\zeta = \frac{1}{m} F(t), \quad \zeta(t) := \dot{x}(t) + i\omega x(t)$$

in der Form

$$x(t) = \text{Im} \zeta(t), \quad \zeta(t) = \frac{1}{m} e^{i\omega t} \int_0^t dt' e^{-i\omega t'} F(t') + \zeta_0$$

mit reeller $F(t)$ dargestellt werden. Zwischen $-\infty < t < \infty$ wird dem Oszillator die Energie

$$E = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \frac{m}{2} |\zeta|^2 = \frac{1}{2m} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt F(t) e^{-i\omega t} \right|^2$$

zugeführt (L^2 , §22).

Zur Wiederholung betrachten wir einen Oszillator mit linearer Dämpfung und periodischer Erregung der Frequenz Ω entsprechend

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos(\Omega t) = \text{Re} \left(\frac{f}{m} e^{i\Omega t} \right).$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet

$$x_h(t) = a e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Als Ansatz für die partikuläre Lösung wählen wir in komplexer Darstellung $x_p(t) = B e^{i\Omega t}$

und erhalten $(-\Omega^2 + 2i\gamma\Omega + \omega_0^2) B e^{i\Omega t} = \frac{f}{m} e^{i\Omega t}$ bzw. $B = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega)}$. Nach

Trennung in Real- und Imaginärteil gemäß $B = b e^{i\delta}$ folgt

$$b = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma\Omega^2}} \quad \text{und} \quad \text{tg } \delta = \frac{2\gamma\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}.$$

Amplitude

Phasenverschiebung

$b(\Omega)$ – Resonanzkurve mit endlicher Amplitude b für $\Omega \rightarrow \omega_0$

Die partikuläre Lösung ist $x_{\text{part}}(t) = \text{Re}(B e^{i\Omega t}) = b \cos(\Omega t + \delta)$. Daraus finden wir die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung (im Fall $\omega_0 > \gamma$)

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = a e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t + \varphi) + b \cos(\Omega t + \delta).$$

In der Nähe der Resonanz $\Omega = \omega_0 + \varepsilon$, $\varepsilon \ll \omega_0$ gilt bei schwacher Dämpfung $\gamma \ll \omega_0$

$$\Omega^2 - \omega_0^2 = (\Omega + \omega_0)(\Omega - \omega_0) - \omega_0^2 \sim 2\omega_0\varepsilon \quad \text{und} \quad 2i\gamma\Omega \sim 2i\gamma\omega_0, \text{ d.h. } B = -\frac{f}{2m(\varepsilon - i\gamma)\omega_0}.$$

Daraus folgt wegen $b = \frac{f}{2m\omega_0\sqrt{\varepsilon^2 + \gamma^2}}$ die im kommenden Kapitel wichtige Relation

$$b^2(\varepsilon^2 + \gamma^2) = \frac{f^2}{4m^2\omega_0^2} \tag{H3}$$

zwischen der Amplitude b der erzwungenen Schwingung in Resonanznähe und der Amplitude der Erregung f . Für die Phasenverschiebung zur Erregung erhalten wir $\text{tg } \delta = \frac{\gamma}{\varepsilon}$. Das

Maximum der Resonanzkurve $b(\varepsilon)$ liegt bei $\varepsilon = 0$ mit

$$b_{\text{max}} = \frac{f}{2m\omega_0\gamma}.$$

Wir untersuchen nun, wie sich die Resonanzkurve im Fall anharmonischer erzwungener Schwingungen gemäß

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 = \frac{f}{m} \cos(\Omega t) - \alpha x^2 - \beta x^3$$

ändert. Im nichtlinearen Fall müssen wir die amplitudenabhängige Frequenzkorrektur (H3)

$$\omega \cong \omega_0 + \chi b^2, \quad \chi = \frac{3\beta}{8\omega_0} \left(1 - \frac{10\alpha^2}{9\omega_0^2} \right)$$

berücksichtigen. In Resonanznähe gilt also $\Omega = \omega_0 + \chi b^2 + \varepsilon^*$ bzw. $\Omega - \omega_0 = \varepsilon = \chi b^2 + \varepsilon^*$.

Deshalb ersetzen wir in der Resonanzkurve $b(\varepsilon)$ in (H3) ε durch $\varepsilon - \chi b^2$ und erhalten

$$b^2 [(\varepsilon - \chi b^2)^2 + \gamma^2] = \frac{f^2}{4m^2\omega_0^2} \quad (\text{H4})$$

für die Abhängigkeit der Amplitude b der erzwungenen anharmonischen Schwingung von der Amplitude der äußeren Erregung f (in Resonanznähe!). Da H(4) eine kubische Gleichung in b^2 ist, unterscheiden wir drei Fälle

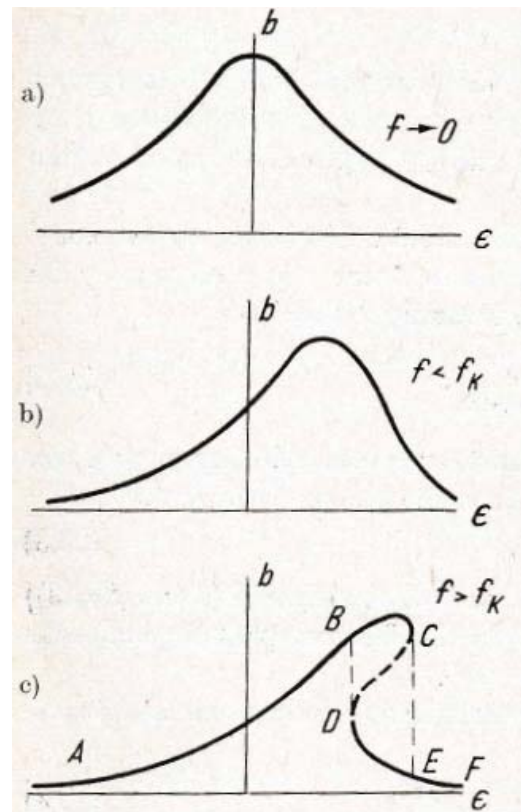
Fall a): schwache äußere Erregung

$$0 < f \ll 1$$

Dann ist f klein, also auch b und wir können Terme der Ordnung b^2 gegen Terme der Ordnung b^4 und b^6 vernachlässigen – (H4) geht in die symmetrische bzgl. $\varepsilon = 0$ Resonanzkurve bei linearen Schwingungen (H2) über, deren Maximum bei $b_{\max} = f / 2m\omega_0\gamma$ liegt. Die kubische Gleichung besitzt eine reelle und zwei konjugiert komplexe Lösungen für alle ε .

Fall b): starke äußere Erregung $f_{\text{cr}} < f$

In einem bestimmten Frequenzbereich besitzt (H4) drei reelle Lösungen b^2 . Dort ist die Resonanzkurve bistabil, d.h., sie besitzt zwei koexistierende stabile Äste, die durch einen instabilen Ast voneinander getrennt sind. Vergrößern wir die Frequenz bei festem f von negativen ε -Werten kommend (unterhalb der Resonanz), so reißt



$A \rightarrow B \rightarrow F$: Schwingungsabriss $C \downarrow E$

$F \rightarrow B \rightarrow A$: Schwingungsabriss $D \uparrow B$

die Schwingung im Punkt C der Resonanzkurve Richtung Punkt E ab. Verringern wir dagegen die Frequenz von Werten oberhalb der Resonanz kommend ereignet sich der Schwingungsabriss im Punkt D. Dabei springt die Amplitude abrupt und (diskontinuierlich) auf den höheren Wert B. Wir beobachten also eine Hysterese.

Zusätzlich zum Schwingungsabriss verschiebt sich die Resonanzfrequenz in Abhängigkeit vom Vorzeichen der Frequenzkorrektur nach rechts ($\chi > 0$) oder nach links ($\chi < 0$). Die maximale Amplitude bleibt erhalten, wie eine einfache Kurvendiskussion der Funktion $b(\varepsilon)$ zeigt.

Fall c): Erregung mit $f_{cr} = f$

In diesem Fall hat die Resonanzkurve (H4) eine reelle und ein Paar rein imaginäre Lösungen, die sich bei Überschreitung von f_{cr} in komplex konjugierte Lösungen umwandeln und zur Ausbildung des instabilen Astes führen.

Ohne Beweis: Ast CD instabil

Übung/Übungsblatt Bestimmen Sie

1. die Grenzen des Bistabilitätsbereiches $D < \varepsilon < C$,

Hinweis: Nutze $\varepsilon_{1/2} = 2\chi b^2 \pm \sqrt{\chi^2 b^4 - \gamma^2} > 0$ und $\left. \frac{db}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = \infty$.

2. das Maximum der Schwingungsamplitude und

$$\frac{db}{d\varepsilon} = 0 \rightarrow \varepsilon = \chi b^2 \rightarrow b_{\max} = \frac{f}{2m\omega_0\gamma}$$

3. die Amplitude der Erregung f_{cr} , bei deren Überschreitung Bistabilität auftritt.

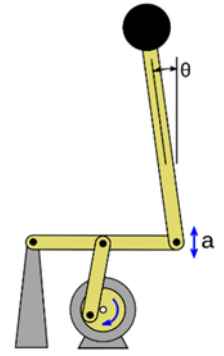
$$\left. \frac{db}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon_{cr}} = \left. \frac{d^2 b}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon_{cr}} = 0, \rightarrow \varepsilon_{cr}^2 = 3\gamma^2, \quad b^2 = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_{cr}}{\chi} \stackrel{(H4)}{\rightarrow} f_{cr}^2 = \frac{32m^2\omega_0^2\gamma^3}{3\sqrt{3}\chi}$$

Plotten Sie die Resonanzkurve für einen f -Wert in jedem der drei Fälle.

FAZIT: Nichtlinearität ist interessant! Typische Effekte bei anharmonischen Schwingungen sind amplitudenabhängige Frequenzkorrekturen, Oberschwingungen, und Schwingungsabriss. Mit der Methode der sukzessiven Approximationen werden resonante Terme systematisch eliminiert.

6.4 Bewegungen im schnell oszillierenden Feld. Kapiza Pendel

Wir betrachten die eindimensionale periodische Bewegung eines Teilchens (Masse m , Periode T) mit der potentiellen Energie $U(x)$ unter dem Einfluss einer hochfrequenten, periodischen äußeren Kraft $f(x, t)$



$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} + f(x, t), \quad f(x, t) = f_1 \cos(\Omega t) + f_2 \sin(\Omega t), \quad \Omega \gg \frac{1}{T} \quad \text{bzw.} \quad T^* = \frac{2\pi}{\Omega} \ll T \quad (\text{H5})$$

Die Periode T der freien Bewegung des Teilchens in $U(x)$ sei viel größer als die Periode T^* der treibenden Kraft.

Zur Lösung der Bewegungsgleichung zerlegen wir die Bewegung in eine langsamen und einen schnell veränderlichen Anteil $X(t)$ bzw. $\zeta(t)$ entsprechend

$$\text{Ansatz: } x(t) = X(t) + \zeta(t)$$

Bewegung entlang „glatter“ Bahnkurve	+ überlagerte hochfrequente Oszillationen mit kleiner Amplitude, Annahme: $\langle \zeta(t) \rangle = 0$
--	--

$\langle \dots \rangle$ bedeutet eine zeitliche Mittlung über die Periode T der langsamen Bewegung. Wir nehmen an, dass die überlagerten hochfrequenten Oszillationen $\zeta(t)$ über T gemittelt

$$\text{verschwinden } \langle \zeta(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \zeta(t) = 0.$$

Wir setzen den Ansatz $x = X + \zeta$ in die Bewegungsgleichung (H5) ein, entwickeln nach Potenzen von ζ bis zur ersten Ordnung und erhalten

$$m\ddot{X} + m\ddot{\zeta} = -\frac{dU}{dX} - \zeta \frac{d^2U}{dX^2} + f(X, t) + \zeta \frac{\partial f}{\partial X} \quad (\text{H6})$$

Nach Abtrennung der Beiträge zur langsamen gemittelten (Zeitskala T) folgt für die schnelle oszillatorische Bewegung auf der Zeitskala T^*

$$m\ddot{\zeta} = -\zeta \frac{d^2U}{dX^2} + f(X, t) + \zeta \frac{\partial f}{\partial X} \cong f(X, t).$$

Die beiden im letzten Schritt weggelassenen Terme enthalten die kleine Größe ζ . Beachte: Obwohl ζ klein ist, gilt das nicht für $\ddot{\zeta} \sim \Omega^2$!

Integrieren wir $m\ddot{\zeta} \cong f(X, t)$ unter Konstanthaltung von X , folgt $\zeta = \frac{f}{m\Omega^2}$. (H7)

Nun mitteln wir (H6) über die Periode der langsamen Bewegung T unter Berücksichtigung von $\langle X \rangle = X$, $\langle \zeta \rangle = 0$

$$m\ddot{X} = -\frac{dU}{dX} + \left\langle \zeta \frac{\partial f}{\partial X} \right\rangle \stackrel{(H7)}{=} -\frac{dU}{dX} - \frac{1}{m\Omega^2} \left\langle f \frac{\partial f}{\partial X} \right\rangle = -\frac{dU}{dX} - \frac{1}{2m\Omega^2} \frac{\partial}{\partial X} \langle f^2 \rangle = -\frac{dU_{\text{eff}}}{dX}$$

wobei das effektive Potenzial die Form

$$U_{\text{eff}} = U + \frac{1}{2m\Omega^2} \langle f^2 \rangle \stackrel{(H5)}{=} \frac{f_1^2 + f_2^2}{4m\Omega^2} \quad (\text{H8})$$

besitzt.

Die Lösungsmethode geht auf P. L. Kapiza (1894 -1984) zurück. Kapiza studierte in Cambridge, arbeitete ab 1921 mit Rutherford im Cavendish Laboratorium zusammen und war mit Dirac befreundet. Bei einem Besuch in der damaligen Sowjetunion wurde ihm 1934 der Reisepass entzogen. Er gründete das berühmte Akademie-Institut für Physikalische Probleme (heute Kapiza-Institut). 1938 entdeckte und beschrieb er die Superfluidität der Quantenflüssigkeit He^3 (keine innere Reibung/Zähigkeit bei Temperaturen unterhalb 2.17 K). Dafür erhielt er 1978 den Nobelpreis. Kapiza bewahrte Landau im Zuge der "Säuberungsaktionen" um 1937 vor der Verbannung nach Sibirien, indem er Stalin gegenüber persönlich für Landau bürgte.

Fazit: Die über die schnellen Oszillationen gemittelte Bewegung erfolgt in einem effektiven Potential, das zusätzlich zu U einen Beitrag enthält, der quadratisch von der Amplitude der treibenden Kraft abhängt.

Übung/Übungsblatt: Kapiza-Pendel (Pendel mit schnell oszillierendem Aufhängepunkt). Bestimme die stabilen Gleichgewichtslagen eines Pendels, dessen Aufhängepunkt schnelle vertikale oder horizontale Oszillationen ausführt.

vertikal: $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ (!) stabil ■

horizontal: $a^2 \gamma^2 < 2gl$: $\varphi = 0$ stabil; $a^2 \gamma^2 > 2gl$: φ aus $\cos \varphi = \frac{2gl}{a^2 \gamma^2}$ stabil.

Youtube – Video Kapiza-Pendel

Zeigestock auf einem Finger stabilisieren.

6.5 Selbsterregte Schwingungen

Selbsterregte Schwingungen sind in Natur und Technik weit verbreitet. Einige wenige Beispiele sollen das illustrieren:

- Mechanische, chemische und biologische Uhren. Zu den "chemischen Uhren" zählen oszillierende chemische Reaktionen, wie die Belousov-Zhabotinsky Reaktion. Biologische Uhren sind Grundlage der Biorhythmen, zu denen z.B. die zirkadianen Rhythmen gehören, die die Stoffwechselaktivität des Körpers im Rhythmus von Tag und Nacht (suprachiasmatischen Kern des Hypothalamus) kontrollieren. Weitere Beispiele sind die oszillatorischen (Schrittmacher)-Zellen im Sinusknoten des Herzens, deren oszillierende Membranpotenziale die rhythmische Kontraktion der Herzmuskelzellen steuern, oder die intrazellulären Ca^{2+} Oszillationen. Pathologisch synchronisierte oszillatorische Aktivität der Neuronen im subthalamischen Kern des Gehirns kann Parkinson (Schüttellähmung) verursachen. Weltweit gibt es etwa 120 000 Patienten mit Hirnstimulator zur Therapie von Morbus Parkinson.

- Reibungsschwingungen wie

a) Quietschende Bremsen, flatternde Flugzeugtragflächen oder Brückenkonstruktionen.

- Wird ein flaches Brett an einem Seil durch Wasser gezogen, so beginnt es ab einer bestimmten Zuggeschwindigkeit quer zur Zugrichtung zu schwingen.

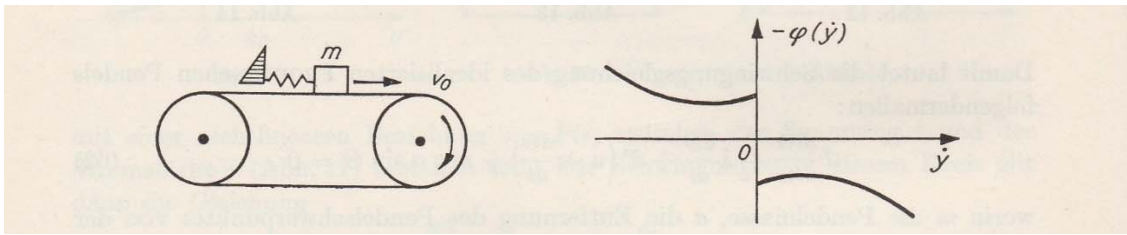
- Regen, Eisbildung und Wind erzeugen Schwingungen an Hochspannungsleitungen.

- Einsturz der Tacoma-Brücke in den USA, 2008.

b) Rippelbildung im sommerlich heißen Asphalt an Straßenkreuzungen verursacht durch selbsterregte Vibrationen abbremsender Fahrzeugräder oder

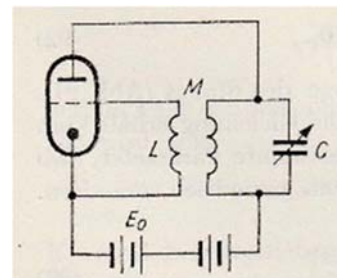
c) Tonerzeugung bei Streichinstrumenten und Orgel

- Masse auf Treibriemen (Bogoljubov/Mitropolski, Einführung, S. 20)



Eine Masse m liegt auf der rauen Oberfläche eines Treibriemens, der sich mit konstanter Geschwindigkeit v_0 bewegt (Abb.) Die Kennlinie der Feder ist linear. Die Kraft $\varphi(\dot{y})$ der trockenen Reibung zwischen Masse und Treibriemen ist nicht konstant, sondern ändert sich in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit der Masse \dot{y} relativ zum Riemen (Abb.) . Für hinreichend große v_0 werden Relaxationsoszillationen angefacht.

- Rückgekoppelte Schwingungserregung in Verstärkern und anderen elektronischen Schaltkreisen mit nichtlinearen Komponenten/Kennlinien;
z.B. Meißner'sche Rückkopplungsschaltung



Andronov erkannte 1929, dass die stabilen Grenzzyklen, also isolierte, geschlossene, anziehende Bahnkurven im Phasenraum, das dynamische Abbild der selbsterregten Schwingungen sind.

Zu jedem Grenzzyklus (limit cycle) gehört ein Einzugsbereich (basin), eine dichte Umgebung von Anfangsbedingungen derart, dass dort gestartete Bahnkurven für $t \rightarrow \infty$ oder $t \rightarrow -\infty$ asymptotisch auf den Grenzzyklus zulaufen. Im ersten Fall ist dieser asymptotisch stabil, im zweiten Fall asymptotisch instabil. Stabile Grenzzyklen gehören zu den Attraktoren in dynamischen Systemen. Sie wurden von Poincaré entdeckt.

Selbsterregte Schwingungen können nur in gepumpten nichtlinearen Systemen auftreten (s.u.), sie sind ein Paradebeispiel für spontane Strukturbildung durch Selbstorganisation: Kontinuierliche (nichtperiodische) Energiezufuhr facht unter bestimmten Bedingungen eine

nichtlineare Oszillation an, deren Amplitude nicht von den Anfangsbedingungen abhängt, sondern ebenso wie ihre Frequenz durch die Parameter des Systems bestimmt ist (selektiert wird).

Bereits 1880 studierte Rayleigh im Zusammenhang mit nichtlinearen Vibrationen und seinen Untersuchungen zum Schall die nichtlineare ODE

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \alpha \left[\frac{1}{3} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 - 1 \right] \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass die Dämpfung für kleine Werte von \dot{v} negativ, für große Werte von \dot{v} dagegen positiv ist ($\alpha > 0$). Aus diesem Grund werden Schwingungen mit kleiner Amplitude aufgeschaukelt, Schwingungen mit großer Amplitude dagegen gedämpft.

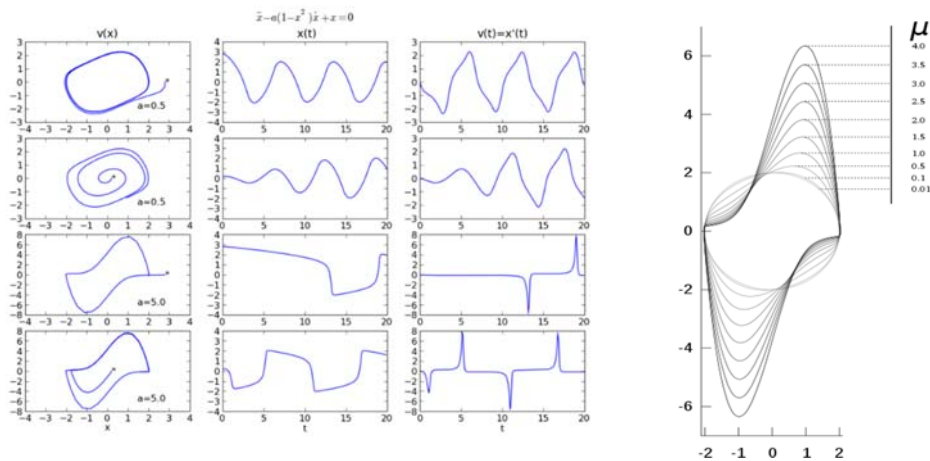
Differenziert man nach t und setzt $\dot{v} = x$, folgt über $\ddot{v} + \alpha [(\dot{v})^2 \ddot{v} - \dot{v}^3] + \omega_0^2 \dot{v} = 0$ die von van der Pol 1926 zur Beschreibung eines Röhrenverstärkers aus den Kirchhoff'schen Sätzen ableitete Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha (x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

Beide Gleichungen sind also miteinander verwandt; wir konzentrieren uns im Folgenden auf die van der Pol'sche Differentialgleichung.

Für kleine Werte des Parameters α beschreibt sie quasiharmonische Oszillationen, deren Charakter sich mit wachsendem α hin zu Relaxationsoszillationen, sogenannten Kippschwingungen, verändert.

Die linken Abbildungen zeigen typische Bahnkurven in der Phasenebene sowie $x(t)$ und $v(t) = \dot{x}(t)$ für unterschiedliche Werte des Parameters α (hier a bezeichnet). Die rechte Abbildung illustriert die Änderung der Form des Grenzyklus von einem Kreis für sehr kleine α (in der Abb. μ) bis hin zu großen Werten, starken Nichtlinearitäten.



- **Selbsterregte Schwingungen schwach dissipativer van der Pol-/Rayleigh-Oszillatoren**

Wir schreiben die Bewegungsgleichung unter Verwendung der Parameter $0 < \varepsilon \ll 1$ und $u_2 > 0$ in leicht veränderter Form

$$\ddot{x} + \varepsilon(u_1 - u_2 \dot{x}^2) \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{bzw.} \quad \dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\omega_0^2 x + \varepsilon(u_1 - u_2 v^2) v \quad (\text{H9})$$

Im Fall $\varepsilon = 0$ ist die Lösung von (H9) eine harmonische Schwingung $x(t) = \frac{A}{\omega_0} \cos(\omega_0 t + \varphi)$,

deren konstante Amplitude A und Phase φ sich aus den Anfangsbedingungen ergeben. Der störungstheoretische Lösungsansatz $x(t) = x^{(0)} + \varepsilon x^{(1)}(t) + \varepsilon^2 x^{(2)}(t) + \dots$ zur Lösung der nichtlinearen ODE (H1) führt in die Irre, da in t unbegrenzt anwachsende säkulare Terme auftreten (vgl. das sehr lesenswerte Buch von N. N. Bogoljubow, J. A. Mitropolski, "Asymptotische Methoden in der Theorie nichtlinearer Schwingungen", Akademie-Verlag, 1965)¹⁾.

Wir fassen im folgenden Amplitude und Phase unter Berücksichtigung von $0 < \varepsilon \ll 1$ als langsam veränderliche Funktionen der Zeit auf und setzen

$$x(t) = \frac{A(t)}{\omega_0} \cos \psi(t), \quad v(t) = -A(t) \sin \psi(t), \quad \psi(t) := \omega_0 t + \varphi(t) \quad . \quad (\text{H10})$$

Wir können (H10) als Substitution $x, v \rightarrow A, \varphi$ auffassen.

Wir finden

$$\omega_0 \frac{dx}{dt} = \frac{dA}{dt} \cos \psi - A \left(\omega_0 + \frac{d\varphi}{dt} \right) \sin \psi \quad \text{und} \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{dA}{dt} \sin \psi - A \left(\omega_0 + \frac{d\varphi}{dt} \right) \cos \psi .$$

Drücken wir nun $\frac{dA}{dt}$ und $\frac{d\varphi}{dt}$ durch $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dv}{dt}$ aus und verwenden die Substitutionen

(H10) und die Bewegungsgleichung (H9), dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \varepsilon (u_1 - u_2 A^2 \sin^2 \psi) A \sin^2 \psi \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \varepsilon (u_1 - u_2 A^2 \sin^2 \psi) \sin \psi \cos \psi \end{aligned} \quad (\text{H11})$$

Sowohl $\frac{dA}{dt}$ als auch $\frac{d\varphi}{dt}$ sind proportional zu ε . Im Fall $0 < \varepsilon \ll 1$ finden wir getrennte

Zeitskalen

$$\frac{1}{\varepsilon} \gg T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \text{Zeitskalentrennung}$$

Mit charakteristischen Zeiten von der Größenordnung $1/\varepsilon$ relaxieren Amplitude und Phase langsam vor dem Hintergrund vergleichsweise schneller Oszillationen mit der Periode T_0 auf ihre stationären (zeitunabhängigen) Werte. Mit anderen Worten: Während einer Periode T_0 der bleiben Amplitude und Phase praktisch konstant. Deshalb können wir A und φ bei der Mittlung der Gleichungen (H11) über eine Periode T_0 der schnellen Oszillationen als näherungsweise konstant ansehen. Das ergibt für die gemittelte Dynamik der Amplitude und Phase

$$\frac{dA}{dt} \cong \overline{\frac{dA}{dt}}^{T_0} = \varepsilon f(A) = \varepsilon \left(u_1 A \frac{1}{2} - u_2 A^3 \frac{3}{8} \right) = \varepsilon \frac{A}{2} \left(u_1 - \frac{3}{4} u_2 A^2 \right) \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi}{dt} \cong \overline{\frac{d\varphi}{dt}}^{T_0} = 0 \quad (\text{H12})$$

Die gemittelte Dynamik von Amplitude und Phase ist entkoppelt, die Phase bleibt in dieser Näherung konstant $\varphi(t) = \varphi_0 = \text{const}$. Die Dynamik der Amplitude auf der Zeitskala $1/\varepsilon$ ist immer noch nichtlinear.

- Stationäre Amplituden und ihre Stabilität

Die beiden stationären Werte der Amplitude $\dot{A} = 0$, $A(t \rightarrow \infty)$ sind die Nullstellen des Polynoms auf der rechten Seite von dA/dt , also

$$A_1 = 0 \quad \text{und} \quad A_2 = \sqrt{\frac{4u_1}{3u_2}}, \quad u_1 > 0:$$

Für negative Werte von u_1 ist die stationäre Amplitude gleich Null, im Fall $u_1 > 0$ strebt die Amplitude asymptotisch gegen den konstanten Wert $A_2 > 0$. Offensichtlich wird $A_1 = 0$ bei $u_1 = 0$, gleichzeitig zweigt wurzelförmig die stabile Lösung $A_2 \sim \sqrt{u_1} \neq 0$ ab.

Die Stabilität von A_i gegenüber infinitesimal kleinen Störungen $\delta A_i(t) := A(t) - A_i$ ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \delta \dot{A}_i &= f(A_i) + \left. \frac{df}{dA} \right|_{A_i} \delta A_i + O((\delta A_i)^2) \cong \left. \frac{df}{dA} \right|_{A_i} \delta A_i = \varepsilon \frac{u_1}{2} \left(1 - \frac{9}{4} \frac{u_2}{u_1} A_i^2 \right) \delta A_i = \\ &= \begin{cases} \varepsilon \frac{u_1}{2} < 0 \quad \text{für } A_1 \quad \text{und } u_1 < 0 \\ -\varepsilon u_1 < 0 \quad \text{für } A_2 \quad \text{und } u_1 > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

A_1 ist stabil für positive, A_2 für negative Werte von u_1 .

Im vorliegenden Fall kann die nichtlineare Gleichung für die gemittelte Amplitudendynamik sogar analytisch gelöst werden. Nach Trennung der Variablen erhalten wir unter Verwendung

$$\text{von } dA \frac{1}{A(a^2 - A^2)} = \frac{1}{2a^2} \ln \left| \frac{A^2}{a^2 - A^2} \right| \quad \text{die im Fall } u_1 > 0 \text{ für die sich langsam veränderliche}$$

Amplitude

$$A(t) = \frac{A_2}{\sqrt{1 + \frac{(A_2)^2 - (A_0)^2}{(A_0)^2} \exp[-u_1 \varepsilon (t - t_0)]}}$$

wobei die Anfangsbedingung $A(t = t_0) := A_0 > 0$ verwendet wurde ([überprüfen](#)).

- „Energiebilanz“

Ohne Reibung, also für $\varepsilon = 0$, liegt ein Hamilton'sches System mit $H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} x^2 =$

const vor. Für $0 < \varepsilon \ll 1$ erhalten wir mit (H9)

$$\frac{dH}{dt} = v \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 x \frac{dx}{dt} = v[-\omega_0^2 x + \varepsilon(u_1 - u_2 v^2)v] + \omega_0^2 x v = \varepsilon(u_1 - u_2 v^2)v^2 .$$

Für kleine Werte von ε (schwache Dissipation) verändert sich die "Energie der selbsterregten Schwingung" im Zeitintervall T_0 ebenfalls nur langsam. Unter Verwendung von (H10) folgt nach Mittlung über T_0

$$\overline{\frac{dH}{dt}}^{T_0} = \varepsilon \overline{(u_1 A^2 \sin^2 \psi - u_2 A^4 \sin^4 \psi)}^{T_0} = \varepsilon \left(\frac{u_1}{2} A^2 - \frac{3u_2}{8} A^4 \right) = \varepsilon \frac{3u_2}{8} [(A_2)^2 - A^2] = \begin{cases} > 0, & A < A_2 \\ = 0, & A = A_2 \\ < 0, & A > A_2 \end{cases} .$$

Im Fall einer selbsterregten Schwingung entlang des Grenzyklus mit der Amplitude $A = A_2$ wird pro Periode T_0 genauso viel Energie aufgenommen wie dissipiert. Für kleine Amplituden, $A < A_2$, wird der Oszillator "gepumpt", die "Energie der Schwingungen" wächst an, während der Oszillator für große Amplituden, $A > A_2$, gedämpft wird.

Fazit: Oberhalb einer kritischen Schwelle der "Rückkopplungsstärke" ($u_1 = 0$) destabilisiert die nicht periodische Energiezufuhr den Ruhezustand (Fixpunkt $x = v = 0$) und bewirkt eine spontane Anfachung selbsterregter Schwingungen mit einer Amplitude $A_2 \sim \sqrt{u_1}$, die nicht von den Anfangsbedingungen abhängt.

Dieser Übergang von nichtoszillatorischem zu oszillatorischem Verhalten erinnert an einen Phasenübergang zweiter Art, also mit Symmetriebruch. Im Gleichgewicht ist das beispielsweise der Übergang zu ferromagnetischem Verhalten am Curie-Punkt. Im vorliegenden Fall handelt es sich um einen Bruch in der Homogenität der Zeit: Unterhalb von $u_1 = 0$ ist $x(t)$ invariant gegen $t \rightarrow t + T$ für beliebige Werte von T , oberhalb von $u_1 = 0$ ist diese Invarianz nur für $T = T_0$ erfüllt. Außerdem passiert der Übergang in einem offenen System mit Energieaustausch, also fern vom Gleichgewicht.

In der Sprache der Nichtlinearen Dynamik entspricht der Übergang einer superkritischen Andronov-Hopf-Verzweigung.

Entlang des Grenzyklus besteht eine Balance zwischen pro T_0 aufgenommener hinein und dissipierter Energie.

Bem.: Die Konstruktion asymptotischer Näherungen für quasiharmonische Schwingungen mit einer Bewegungsgleichung der Form $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x})$ wird in Kapitel 1 von Bogoljubow et al. ¹⁾ erläutert: Dabei wird allgemeine Lösung für $0 < \varepsilon \ll 1$ in der Form

$$x(t) = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi) + \dots$$

gesucht, wobei $u_i(a, \psi)$ periodische Funktionen mit der Periode 2π sind und $A(t)$ und $\psi(t)$ aus den ODE

$$\frac{dA}{dt} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots + \varepsilon^k A_k(a) + \dots, \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots + \varepsilon^k B_k(a) + \dots$$

bestimmt werden. In den Reihenentwicklungen wird nur eine endliche Anzahl von Termen berücksichtigt. Die praktische Verwendbarkeit der Methode beruht nicht auf den Konvergenzeigenschaften der Reihen für $k \rightarrow \infty$, sondern auf ihren asymptotischen Eigenschaften für ein gegebenes festes k bei $\varepsilon \rightarrow 0$. Es ist erforderlich, dass bei kleinem ε die bei endlichen k abgebrochene Reihe eine genügend genaue Näherungslösung der Ausgangsgleichung für ein genügend langes Zeitintervall darstellt (Genauigkeit der Ordnung ε^{k+1}).

6.6 Harmonische Schwingungen in Systemen mit vielen Freiheitsgraden

Eigenfrequenzen, Normalschwingungen, Molekülschwingungen in harmonischer Näherung

In diesem Kapitel interessieren wir uns für Schwingungen kleiner Amplitude in Systemen mit vielen Freiheitsgraden.

Beispiele:

- Gekoppelte ebene mathematische Pendel
- Eindimensionale Kette von N Atomen/Molekülen
- Atom- und Molekülschwingungen → Spektroskopie
- Gitterschwingungen in Festkörpern
- Schallausbreitung (Phononen); → Wärmekapazität bei niedrigen Temperaturen

Wir verwenden verallgemeinerte Koordinaten $\underline{q} = (q_1, \dots, q_f)$, f -Anzahl der Freiheitsgrade, und betrachten Schwingungen kleiner Amplitude um eine stabile Gleichgewichtslage \underline{q}_0 der potenziellen Energie $U(\underline{q})$, d.h.

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q_i} \right|_{\underline{q}^0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\underline{q}^0} =: k_{ij} = k_{ji} \text{ symmetrisch.}$$

In der Umgebung $\delta q_i = q_i - q_i^0$ von \underline{q}^0 entwickeln wir die potenzielle Energie in eine Taylor-Reihe

$$U(\underline{q}) = U(\underline{q}^0) + \underbrace{\sum_{i=1}^f \left. \frac{\partial U}{\partial q_i} \right|_{\underline{q}^0}}_{\text{Null}} \delta q_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^f \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\underline{q}^0} \delta q_i \delta q_j + O(\delta q_i \delta q_j \delta q_k) \cong U(\underline{q}^0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^f k_{ij} \delta q_i \delta q_j.$$

Verschieben wir den Koordinatenursprung in den Punkt $\{\underline{q}^0, U(\underline{q}^0)\}$, dann können wir δq_i durch q_i ersetzen und erhalten für die potenzielle Energie in harmonischer Näherung

$$U(\underline{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^f k_{ij} q_i q_j \geq 0.$$

In der Umgebung der stabilen Gleichgewichtslage ist die potenzielle Energie positiv.

Die kinetische Energie ergibt sich über

$$T(\dot{\underline{r}}) = \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n}{2} \dot{\underline{r}}_n^2 \quad \underbrace{=}_{\underline{r}=\underline{r}(\underline{q})} \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n}{2} \dot{\underline{r}}_n^2 \sum_{i,j=1}^f \frac{\partial \underline{r}_n}{\partial q_i} \dot{q}_i \frac{\partial \underline{r}_n}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad \text{zu}$$

$$T(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^f m_{ij}(\underline{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad \text{mit} \quad m_{ij}(\underline{q}) := \sum_{n=1}^{3N} m_n \frac{\partial \underline{r}_n}{\partial q_i} \frac{\partial \underline{r}_n}{\partial q_j} = m_{ji}(\underline{q}).$$

In harmonischer Näherung sind sowohl \underline{q} als auch $\dot{\underline{q}}$ kleine Größen, also haben wir

$$T(\dot{\underline{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^f m_{ij}(0) \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

denn schon die Terme $\left. \frac{\partial m_{ij}(\underline{q})}{\partial q_k} \right|_0 q_k$ ergäben Beiträge dritter Ordnung $\sim q_k \dot{q}_i \dot{q}_j$.

Fazit: Die Lagrange-Funktion für kleinamplitudige Schwingungen um eine stabile Gleichgewichtslage in einem System mit f Freiheitsgraden ist in harmonischer Näherung

$$L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^f (m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - k_{ij} q_i q_j); \quad m_{ij} := \sum_{n=1}^{3N} m_n \left. \frac{\partial r_n}{\partial q_i} \right|_0 \left. \frac{\partial r_n}{\partial q_j} \right|_0 = m_{ji}, \quad k_{ij} := \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_0 = k_{ji}. \quad (H)$$

Aus $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = \sum_{j=1}^f m_{sj} \dot{q}_j$, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) = \sum_{j=1}^f m_{sj} \ddot{q}_j$, $\frac{\partial L}{\partial q_s} = \sum_{j=1}^f k_{sj} q_j$ ergeben sich f Lagrange-

Gleichungen II. Art

$$\sum_{j=1}^f (m_{ij} \ddot{q}_j + k_{ij} q_j) = 0, \quad i = 1, \dots, f. \quad (H1)$$

Diese Gleichungen beschreiben gekoppelte harmonische Schwingungen $\left(\sum_{j=1}^f ! \right)$: Ein

einzelner schwingender Freiheitsgrad regt alle übrigen zum Schwingen an; dadurch entstehen kollektive Anregungen.

Zur Lösung des Systems gekoppelter linearer homogener ODE (H1) verwenden wir wie üblich den Lösungsansatz $q_j(t) = A_j e^{i\omega t}$. Er führt auf das algebraische Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^f (-\omega^2 m_{ij} + k_{ij}) A_j = 0. \quad (H2)$$

Nichttriviale Lösungen $A_j \neq 0$ besitzt (H2) nur für Werte ω^2 , die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\det(-\omega^2 m_{ij} + k_{ij}) = 0$$

sind. Die charakteristische Gleichung ist ein Polynom vom Grade f in ω^2 mit reellen Koeffizienten, dessen Nullstellen $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_f^2$ i.a. komplex sein können.

Im vorliegenden Falle sind alle ω_α^2 reell und positiv, denn $\sum_{i=1}^f (H2) A_i^*$ führt auf

$$\sum_{i,j=1}^f (-\omega^2 m_{ij} + k_{ij}) A_j A_i^* = 0 \quad \text{also} \quad \omega^2 = \frac{\sum_{i,j=1}^f k_{ij} A_j A_i^*}{\sum_{i,j=1}^f m_{ij} A_j A_i^*}.$$

Zähler und Nenner sind positiv und reell¹⁾. Negative oder komplexe ω_α^2 würden ω_α mit negativem Imaginärteil nach sich ziehen, die exponentiell anwachsenden instabilen Schwingungen $q_j(t) = A_j e^{i\omega t}$ entsprächen. Dies stände im Widerspruch zur angenommenen Stabilität der Gleichgewichtslage $q_i^0 = 0$.

¹⁾ Das kann man auch leicht direkt zeigen, da k_{ij} und m_{ij} reelle symmetrische Matrizen sind:

$$\left(\sum_{i,j=1}^f k_{ij} A_j A_i^* \right)^* = \sum_{i,j=1}^f k_{ij} A_j^* A_i = \sum_{i,j=1}^f k_{ji} A_i^* A_j \stackrel{k_{ij}=k_{ji}}{=} \sum_{i,j=1}^f k_{ij} A_j A_i^* .$$

Die positiven reellen Lösungen $\omega_\alpha > 0$ ($\alpha = 1, \dots, f$) der charakteristischen Gleichung werden \rightarrow **Eigenfrequenzen** genannt. Sie stellen die für alle Massepunkte gemeinsamen, in den Matrizen m_{ij} und k_{ij} „verschlüsselten“ Schwingungsfrequenzen dar.

Die dazugehörigen Schwingungen mit Amplituden A_j^α werden aus

$$\sum_{j=1}^f (-\omega_\alpha^2 m_{ij} + k_{ij}) A_j^\alpha = 0, \quad i = 1, \dots, f \tag{H3}$$

bestimmt. Diese sogenannten **Eigenschwingungen**/Normalschwingungen/Normalmoden zeichnen sich durch eine besonders hohe Symmetrie der Bewegung aus (siehe Beispiele unten). Die allgemeine Lösung von (H1) ist die Superposition der Eigenschwingungen

$$q(t) = \sum_{\alpha=1}^f \underline{A}^\alpha B_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha) .$$

Die Anfangsbedingungen legen die $2f$ reellen Integrationskonstanten B_α und φ_α fest.

- **Transformation auf Normalkoordinaten. Normalschwingungen.**

Wir verifizieren leicht die folgenden Orthogonalitätsrelationen

$$\sum_{i,j=1}^f A_i^\alpha m_{ij} A_j^\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{und} \quad \sum_{i,j=1}^f A_i^\alpha k_{ij} A_j^\beta = \omega_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta} \tag{H4}$$

Beweis: Der Einfachheit halber für den Fall, dass alle ω_α voneinander verschieden sind (keine Entartung):

Einerseits folgt aus (H2) $\sum_{j=1}^f k_{ij} A_j^\alpha = \omega_\alpha^2 \sum_{j=1}^f m_{ij} A_j^\alpha$ nach Multiplikation mit A_i^β und

Summation über i

$$\sum_{i,j=1}^f A_i^\beta k_{ij} A_j^\alpha = \omega_\alpha^2 \sum_{j=1}^f A_i^\beta m_{ij} A_j^\alpha = \omega_\alpha^2 \sum_{i,j=1}^f A_j^\alpha m_{ij} A_i^\beta \stackrel{i \leftrightarrow j}{=} \omega_\alpha^2 \sum_{i,j=1}^f A_i^\alpha m_{ij} A_j^\beta .$$

Andererseits ist

$$\sum_{j=1}^f k_{ij} A_j^\beta = \omega_\beta^2 \sum_{j=1}^f m_{ij} A_j^\beta \quad | \cdot A_i^\alpha, \sum_{i=1}^f \rightarrow \sum_{i,j=1}^f A_i^\alpha k_{ij} A_j^\beta = \omega_\beta^2 \sum_{i,j=1}^f A_i^\alpha m_{ij} A_j^\beta \stackrel{i \leftrightarrow j}{=} \sum_{i,j=1}^f A_i^\beta k_{ij} A_j^\alpha$$

Subtraktion liefert die erste Orthogonalitätsbedingung,

$$0 = (\omega_\alpha^2 - \omega_\beta^2) \sum_{i,j=1}^f A_i^\alpha m_{ij} A_j^\beta$$

vorausgesetzt, es liegt keine Entartung vor. Die zweite Relation folgt analog.

Nun führen wir neue verallgemeinerte Koordinaten Q_α entsprechend

$$\underline{q}_i = \sum_{\alpha=1}^f A_i^\alpha Q_\alpha \tag{H5}$$

ein. Mit Hilfe der quadratischen Matrix aus den Spaltenvektoren \underline{A}^α gemäß (H3)

$$\underline{\underline{a}} = (\underline{a}_{i\alpha}) = (\underline{A}_i^\alpha) = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \dots & A_1^f \\ A_2^1 & A_2^2 & \dots & A_2^f \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_f^1 & A_f^2 & \dots & A_f^f \end{pmatrix} \tag{H6}$$

können wir die Definition (H5) und die Relationen (H4) in kompakter Form schreiben:

$$\underline{q} = \underline{\underline{a}} \underline{Q}, \quad \underline{Q} = \underline{\underline{a}}^{-1} \underline{q}, \quad \sum_{i,j=1}^f A_i^\alpha m_{ij} A_j^\beta = \underline{\underline{a}} \underline{\underline{m}} \underline{\underline{a}} = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{und} \quad \sum_{i,j=1}^f A_i^\alpha k_{ij} A_j^\beta = \underline{\underline{a}} \underline{\underline{k}} \underline{\underline{a}} = \omega_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta} .$$

Die Bewegungsgleichungen in den neuen Koordinaten ergeben sich aus (H1) und (H5)

$$0 = \sum_{j=1}^f (m_{ij} \ddot{q}_j + k_{ij} q_j) = \sum_{j=1}^f \sum_{\alpha=1}^f (m_{ij} A_j^\alpha \ddot{Q}_\alpha + k_{ij} A_j^\alpha Q_\alpha) \quad \left| \cdot A_i^\beta (\text{von links}), \sum_{i=1}^f \right.$$

$$0 = \sum_{\alpha=1}^f \left(\ddot{Q}_\alpha \underbrace{\sum_{i,j=1}^f A_i^\beta m_{ij} A_j^\alpha}_{\delta_{\alpha\beta}} + Q_\alpha \underbrace{\sum_{i,j=1}^f A_i^\beta k_{ij} A_j^\alpha}_{\omega_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta}} \right) = \ddot{Q}_\beta + \omega_\beta^2 Q_\beta.$$

zu

$$\ddot{Q}_\beta + \omega_\beta^2 Q_\beta = 0.$$

Sie beschreiben entkoppelte, voneinander unabhängige, harmonische Schwingungen mit Eigenfrequenzen ω_α . Das bedeutet für die Lagrange-Funktion

$$L(\underline{Q}, \dot{\underline{Q}}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^f (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2),$$

wie man leicht auch direkt zeigt:

$$2L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \sum_{i,j=1}^f (m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - k_{ij} q_i q_j) = \dot{\underline{q}}^T \underline{\underline{m}} \dot{\underline{q}} - \underline{q}^T \underline{\underline{k}} \underline{q} = (\underline{\underline{a}} \dot{\underline{Q}})^T \underline{\underline{m}} (\underline{\underline{a}} \dot{\underline{Q}}) - (\underline{\underline{a}} \underline{Q})^T \underline{\underline{k}} (\underline{\underline{a}} \underline{Q}) =$$

$$= \dot{\underline{Q}}^T (\underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{m}} \underline{\underline{a}}) \dot{\underline{Q}} - \underline{Q}^T (\underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{k}} \underline{\underline{a}}) \underline{Q} = \sum_{\alpha=1}^f (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2).$$

Beispiele:

- Doppelpendel (Übungsblatt)
- N über Federn gekoppelte MP (Massen m) auf einem Kreis (Radius R)