

7. Mechanik des starren Körpers (SK)

- Beispiele: Hantel, Billardkugel, Kreisel, keltischer Wackelstein, usw.

Wir fassen den starren Körper (SK) als System aus N Massepunkten auf, deren relative Lage zueinander sich nicht verändert. Mit anderen Worten: Uns interessiert nur die Bewegung des SK als Ganzes – Form- und/oder Volumenänderungen seien vernachlässigbar.

Ein derartiger Körper besitzt maximal sechs Freiheitsgrade, drei Translations- und drei Rotationsfreiheitsgrade. Ein Kreisel, der in einem Punkt abgestützt ist, hat drei Freiheitsgrade; ein um eine feste Achse rotierendes physikalisches Pendel einen Freiheitsgrad; usw.

7.1 Raumfestes und körperfestes Bezugssystem

Wir führen ein raumfestes kartesisches Koordinatensystem (RKS) mit den Ortsvektoren $\underline{R} = (X, Y, Z)^T$ und den (festen) Einheitsvektoren $\underline{E}_x, \underline{E}_y, \underline{E}_z$ sowie ein körperfestes (fest mit dem SK verbundenes) Koordinatensystem (KKS) ein, dessen Orts- und Einheitsvektoren wir wahlweise mit $\underline{r} = (x, y, z)^T$ und $\underline{e}_x(t), \underline{e}_y(t), \underline{e}_z(t)$ oder $\underline{r} = (x_1, x_2, x_3)^T$ und $\underline{e}_1(t), \underline{e}_2(t), \underline{e}_3(t)$ bezeichnen. Das RKS ist ein Inertialsystem, das KKS nicht.

Sei $\underline{R}_0(t)$ der Radiusvektor des Ursprungs O des KKS aus Sicht des RKS. Dann setzt sich die infinitesimale Verschiebung eines Punktes P des SK mit dem Radiusvektor $\underline{R}(t)$ aus dem Anteil $d\underline{R}_0$ entsprechend der Verschiebung von O bei unveränderter Achsenrichtung $\underline{e}_i(t)$ und der auf O bezogenen Drehung von P um den Winkel $d\varphi$ zusammen. Also gilt

$$d\underline{R} = d\underline{R}_0 + d\underline{r} = d\underline{\varphi} \times \underline{r} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\underline{R}}{dt} = \frac{d\underline{R}_0}{dt} + \frac{d\underline{\varphi}}{dt} \times \underline{r} \quad \text{und daher}$$

$$\underline{V}(t) = \underline{V}_0(t) + \underline{\omega}(t) \times \underline{r} : \tag{7.1}$$

Die Geschwindigkeit des Punktes P im RKS addiert sich aus der Geschwindigkeit des Ursprungs des KKS im RKS und der Rotationsgeschwindigkeit $\underline{\omega}(t)$ des starren Körpers um seine momentane Drehachse $\underline{\omega}(t)$.

Verschieben wir den Ursprung des KKS O um einen Vektor $\underline{a} = \text{const}$, dann geht \underline{V} über in $\tilde{\underline{V}} = \underline{V}_0 + \underline{\omega} \times (\underline{r} + \underline{a}) = \underline{V}_0 + \underline{\omega} \times \underline{a} + \underline{\omega} \times \underline{r} = \tilde{\underline{V}}_0 + \underline{\omega} \times \underline{r}$. Im Gegensatz zur Translationsgeschwindigkeit hängt die Rotationsgeschwindigkeit des starren Körpers nicht von der Wahl des Ursprungs O des KKS ab.

Wie ändert sich die momentane Drehachse $\underline{\omega}(t)$ bei der Bewegung des starren Körpers?

7.1 Kinetische Energie und Drehimpuls des starren Körpers. Trägheitstensor. Lagrange-Funktion

A: Zunächst fassen wir den starren Körper als System aus N Massepunkten mit den

Ortsvektoren $\underline{r}_\alpha(t)$ ($\alpha = 1, \dots, N$) auf. Dann ist seine kinetische Energie ($\sum_\alpha := \sum_{\alpha=1}^N$)

$$\begin{aligned} T &= \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} \underline{V}^2 = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} (\underline{V}_0 + \underline{\omega} \times \underline{r}_\alpha)^2 = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} \underline{V}_0^2 + \sum_\alpha m_\alpha \underline{V}_0 \cdot \underline{\omega} \times \underline{r}_\alpha + \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} (\underline{\omega} \times \underline{r}_\alpha)^2 = \\ &= \frac{M}{2} \underline{V}_0^2 + \underline{V}_0 \times \underline{\omega} \cdot \sum_\alpha m_\alpha \underline{r}_\alpha + \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \left[\underline{\omega}^2 \underline{r}_\alpha^2 - (\underline{\omega} \cdot \underline{r}_\alpha)^2 \right], \end{aligned}$$

denn

$$(\underline{\omega} \times \underline{r}_\alpha)^2 = (\underline{\omega} \times \underline{r}_\alpha) \cdot (\underline{\omega} \times \underline{r}_\alpha) \stackrel{\text{zykl}}{=} \underline{\omega} \cdot [\underline{r}_\alpha \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_\alpha)] \stackrel{\text{b(a-c)}-\text{c(a-b)}}{=} \underline{\omega} \cdot [\underline{\omega}(\underline{r}_\alpha \cdot \underline{r}_\alpha) - \underline{r}_\alpha(\underline{r}_\alpha \cdot \underline{\omega})] = \underline{\omega}^2 \underline{r}_\alpha^2 - (\underline{\omega} \cdot \underline{r}_\alpha)^2$$

M bezeichnet die Gesamtmasse $M := \sum_\alpha m_\alpha$. Es ist vorteilhaft, den Ursprung des KKS in den

Schwerpunkt des starren Körpers zu legen, denn dann ist $\sum_\alpha m_\alpha \underline{r}_\alpha = 0$ und wir erhalten

$$T = \frac{M}{2} \underline{V}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \left[\underline{\omega}^2 \underline{r}_\alpha^2 - (\underline{\omega} \cdot \underline{r}_\alpha)^2 \right] =: T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}} \quad (7.2)$$

Fazit: Denken wir uns die Gesamtmasse im Schwerpunkt vereinigt, können wir den starren Körper hinsichtlich seiner kinetischen Energie der Translation T_{trans} als Massepunkt M auffassen. Der Term T_{rot} gibt die kinetische Energie der Rotationsbewegung um eine [Drehachse durch den Schwerpunkt](#) an.

Die "Koordinatenschreibweise" der Rotationsenergie sieht mit $\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ und $\underline{r}_\alpha = (x_1^\alpha, x_2^\alpha, x_3^\alpha)^T$ folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{2} (\underline{\omega} \times \underline{r}_{\alpha})^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\underline{\omega}^2 \underline{r}_{\alpha}^2 - (\underline{\omega} \cdot \underline{r}_{\alpha})^2 \right] = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\sum_{i=1}^3 \omega_i^2 \underline{r}_{\alpha}^2 - \sum_{i=1}^3 \omega_i x_i^{\alpha} \sum_{k=1}^3 \omega_k x_k^{\alpha} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\sum_{i,k=1}^3 \omega_i \omega_k \delta_{ik} \underline{r}_{\alpha}^2 - \sum_{i=1}^3 \omega_i x_i^{\alpha} \sum_{k=1}^3 \omega_k x_k^{\alpha} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 \theta_{ik} \omega_i \omega_k \end{aligned}$$

wobei wir die Größe

$$\theta_{ik} := \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} (\underline{r}_{\alpha}^2 \delta_{ik} - x_i^{\alpha} x_k^{\alpha}) \quad \rightarrow \quad \text{Trägheitstensor des starren Körpers} \quad (7.3)$$

eingeführt haben.

B: Bei kontinuierlicher Massedichte $\rho(\underline{r})$ ergibt sich für den Trägheitstensor mit Hilfe des

Übergangs $m_{\alpha} \rightarrow \rho(\underline{r}_{\alpha}) d^3 r_{\alpha}$ und $\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \xrightarrow[\Delta V_{\alpha} \rightarrow 0]{N \rightarrow \infty} \int_V d^3 r \rho(\underline{r})$ der Ausdruck

$$\theta_{ik} := \int_V d^3 r \rho(\underline{r}) (\underline{r}^2 \delta_{ik} - x_i x_k) . \quad (7.3a)$$

Der Trägheitstensor $\underline{\theta}$ ist das Analogon zur Masse bei der Translation. Er beschreibt das Beharrungsvermögen/die Trägheitseigenschaften des starren Körpers gegenüber Änderungen seiner Rotation. $\underline{\theta}$ hängt von der Lage des Ursprungs und der Orientierung der Achsen des KKS ab.

Liegt der Ursprung des KKS O' nicht im Schwerpunkt des starren Körpers, sondern in einem Punkt im Abstand \underline{a} davon, also $\underline{r} = \underline{r}' + \underline{a}$, dann folgt aus (7.3)

$$\begin{aligned} \underline{\theta}'_{ik} &:= \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} (\underline{r}'_{\alpha}{}^2 \delta_{ik} - x_i'^{\alpha} x_k'^{\alpha}) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [(\underline{r}_{\alpha} - \underline{a})^2 \delta_{ik} - (x_i^{\alpha} - a_i)(x_k^{\alpha} - a_k)] = \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} [(r_{\alpha}^2 - 2\underline{r}_{\alpha} \cdot \underline{a} + a^2) \delta_{ik} - x_i^{\alpha} x_k^{\alpha} + a_i x_k^{\alpha} + a_k x_i^{\alpha} - a_i a_k] = \\ &= a^2 \delta_{ik} \underbrace{\sum_{\alpha} m_{\alpha}}_M - 2 \delta_{ik} \underbrace{\underline{a} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \underline{r}_{\alpha}}_0 + \underbrace{\sum_{\alpha} m_{\alpha} (r_{\alpha}^2 \delta_{ik} - x_i^{\alpha} x_k^{\alpha})}_{\theta_{ik}} - a_i a_k \underbrace{\sum_{\alpha} m_{\alpha}}_M + a_i \underbrace{\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_k^{\alpha}}_0 + a_k \underbrace{\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_i^{\alpha}}_0 = \\ &= \underline{\theta}_{ik} + M(a^2 \delta_{ik} - a_i a_k). \end{aligned}$$

Also lässt sich $\underline{\theta}'_{ik}$ einfach aus θ_{ik} berechnen.

Insbesondere gilt für das Trägheitsmoment $\theta(\underline{n})$ bezogen auf eine Drehachse \underline{n} durch den Schwerpunkt des starren Körpers und das Trägheitsmoment $\theta'(\underline{n})$ bezogen auf eine dazu parallele Drehachse die Relation

$$\underline{\theta}'(\underline{n}) = \underline{n} \cdot \underline{\theta}' \cdot \underline{n}^T = \underline{n} \cdot \underline{\theta} \cdot \underline{n}^T + M[\underline{a}^2 \underline{n}^2 - (\underline{a} \cdot \underline{n})^2] = \underline{\theta}(\underline{n}) + M d_a^2,$$

wobei M die Gesamtmasse und d_a der senkrechte Abstand zwischen den beiden parallelen Drehachsen ist (**Satz von Steiner**).

Bemerkung: $\theta(\underline{n}) = \underline{n} \cdot \underline{\theta} \cdot \underline{n}^T$ folgt aus der Definition des Trägheitsmoments bei einer Rotation

$$\text{um eine Drehachse in Richtung } \underline{n}: \theta(\underline{n}) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2.$$

d_{α} ist der senkrechte Abstand des Massepunkts m_{α} mit dem Ortsvektor \underline{r}_{α} von der

Drehachse $\underline{\omega}$, $\underline{n} := \frac{\underline{\omega}}{\omega}$ der Einheitsvektor in Richtung der Drehachse. Die Projektion $(\underline{r}_{\alpha} \cdot \underline{n})$

auf die Drehachse, d_{α} und $r_{\alpha} = |\underline{r}_{\alpha}|$ bilden ein rechtwinkliges Dreieck, also ist

$$\underline{n} \cdot \underline{\theta} \cdot \underline{n}^T = \sum_{i,k=1}^3 n_i n_k \sum_{\alpha} m_{\alpha} (r_{\alpha}^2 \delta_{ik} - x_i^{\alpha} x_k^{\alpha}) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \underbrace{[r_{\alpha}^2 - (\underline{n} \cdot \underline{r}_{\alpha})^2]}_{\text{Pythagoras}} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2 = \theta(\underline{n})$$

Beispiele: Übung

Man kann zeigen, dass $\underline{\underline{\theta}}$ ein symmetrischer **Tensor** zweiten Ranges ist. Er besitzt also nur sechs unabhängige Komponenten/Matrixelemente:

$$\underline{\underline{\theta}} = \begin{pmatrix} \theta_{xx} & \theta_{xy} & \theta_{xz} \\ \theta_{yx} & \theta_{yy} & \theta_{yz} \\ \theta_{xz} & \theta_{yz} & \theta_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} y_{\alpha} & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} z_{\alpha} \\ -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} y_{\alpha} & \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} y_{\alpha} z_{\alpha} \\ -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} z_{\alpha} & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} y_{\alpha} z_{\alpha} & \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2) \end{pmatrix}. \quad (7.4)$$

In (7.4) haben wir die Notation $x_1^{\alpha} = x_{\alpha}$, $x_2^{\alpha} = y_{\alpha}$, $x_3^{\alpha} = z_{\alpha}$ verwendet. Im kontinuierlichen Fall ist

$$\underline{\underline{\theta}} = \begin{pmatrix} \theta_{xx} & \theta_{xy} & \theta_{xz} \\ \theta_{yx} & \theta_{yy} & \theta_{yz} \\ \theta_{xz} & \theta_{yz} & \theta_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) (y^2 + z^2) & -\int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) x y & -\int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) x z \\ -\int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) x y & \int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) (x^2 + z^2) & -\int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) y z \\ -\int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) x z & -\int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) y z & \int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) (x^2 + y^2) \end{pmatrix} \quad (7.4a)$$

Die Lagrange-Funktion des starren Körpers lautet

$$L = \frac{M}{2} \underline{V}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 \theta_{ik} \omega_i \omega_k - U, \quad \theta_{ik} := \int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) (\mathbf{r}^2 \delta_{ik} - x_i x_k) \quad (7.5)$$

Hier steht die potenzielle Energie U für alle äußeren Felder, denn eine Wechselwirkung, die den Abstand der Teilchen untereinander ändern könnte, gibt es im Fall des starren Körpers nicht. U hängt von den Freiheitsgraden des starren Körpers ab.

Der Gesamtdrehimpuls des starren Körpers ist

$$\begin{aligned} \underline{L}_{\text{ges}} &= \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \underline{R}_{\alpha} \times \dot{\underline{R}}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\underline{R}_0 + \underline{r}_{\alpha}) \times (\underline{V}_0 + \underline{\omega} \times \underline{r}_{\alpha}) = \\ &= \underline{R}_0 \times \underline{V}_0 \sum_{\alpha} m_{\alpha} + \underline{V}_0 \times \sum_{\alpha} m_{\alpha} \underline{r}_{\alpha} + \underline{R}_0 \times \underline{\omega} \times \sum_{\alpha} m_{\alpha} \underline{r}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \underline{r}_{\alpha} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_{\alpha}) \end{aligned}$$

Legen wir der Ursprung des KKS wieder in den Schwerpunkt, dann ist $\sum_{\alpha} m_{\alpha} \underline{r}_{\alpha} = 0$ und

$$\underline{L}_{\text{ges}} = \overbrace{\underline{R}_0 \times M \underline{V}_0}^{\text{Schwerpunktsdreimpuls } \underline{L}_S} + \overbrace{\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} [\underline{\omega} \underline{r}_{\alpha}^2 - \underline{r}_{\alpha} (\underline{r}_{\alpha} \cdot \underline{\omega})]}^{\text{Relativdreimpuls } \underline{L}} . \quad (7.6)$$

Für den Relativdreimpuls gilt

$$\underline{L}_i = \sum_{k=1}^3 \theta_{ik} \omega_k \quad \text{oder in Matrixschreibweise} \quad \underline{L} = \underline{\theta} \cdot \underline{\omega}^T . \quad (7.7)$$

Beweis: Zur Vereinfachung der Notation unterdrücken wir den Index α bei x_i^{α} :

$$\begin{aligned} \underline{L} &= \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} [\underline{\omega} \underline{r}_{\alpha}^2 - \underline{r}_{\alpha} (\underline{r}_{\alpha} \cdot \underline{\omega})] = \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) (\omega_1 \underline{e}_1 + \omega_2 \underline{e}_2 + \omega_3 \underline{e}_3) - (x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3) (x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2 + x_3 \omega_3) \right] = \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left\{ \underline{e}_1 \left[(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \omega_1 - x_1^2 \omega_1 - x_1 x_2 \omega_2 - x_1 x_3 \omega_3 \right] + \underline{e}_2 [\dots] + \underline{e}_3 [\dots] \right\} = \\ &= \underline{e}_1 \left[\omega_1 \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_2^2 + x_3^2) - \omega_2 \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_1 x_2 - \omega_3 \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_1 x_3 \right] + \underline{e}_2 [\dots] + \underline{e}_3 [\dots] =: L_1 \underline{e}_1 + L_2 \underline{e}_2 + L_3 \underline{e}_3 \end{aligned}$$

Für die Projektion L_1 des Drehimpulses auf die \underline{e}_1 - Richtung haben wir

$$L_1 = \omega_1 \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_2^2 + x_3^2) - \omega_2 \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_1 x_2 - \omega_3 \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_1 x_3 = \theta_{11} \omega_1 + \theta_{12} \omega_2 + \theta_{13} \omega_3$$

wie wir durch Vergleich mit (7.4) sofort erkennen.

Analog läuft der Beweis für die anderen beiden Komponenten $L_2 \underline{e}_2$ und $L_3 \underline{e}_3$.

Beachte: Die beiden zeitabhängigen Vektoren $\underline{L}(t)$ und $\underline{\omega}(t)$ zeigen i.a. in unterschiedliche Richtungen.

Außerdem gilt zwischen der kinetischen Energie der Rotation T_{rot} und dem Rotationsanteil des Drehimpulses \underline{L} wegen

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\underline{\omega} \times \underline{r}_{\alpha})^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\underline{\omega} \times \underline{r}_{\alpha}) (\underline{\omega} \times \underline{r}_{\alpha}) \stackrel{\text{zykl}}{=} \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \underline{\omega} \cdot [\underline{r}_{\alpha} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_{\alpha})]$$

die Beziehung

$$\underline{T}_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\underline{r}_{\alpha} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_{\alpha})] = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{L} = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{\theta} \cdot \underline{\omega}^T . \quad (7.8)$$

7.3 Hauptträgheitsachsen und Hauptträgheitsmomente

Bisher haben wir zwar den Ursprung des KKS festgelegt (im Schwerpunkt), nicht jedoch die Orientierung seiner Achsen \underline{e}_i im Raum.

Nun sollen die \underline{e}_i so orientiert werden, dass der Trägheitstensor diagonal wird

$$\underline{\underline{\theta}} = (\theta_i \delta_{ik}) = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 \end{pmatrix}. \quad (7.9)$$

Dieses spezielle KKS heißt Hauptachsensystem (HAS), die dazugehörigen Koordinatenachsen werden Hauptträgheitsachsen und die drei diagonalen Elemente θ_i Hauptträgheitsmomente genannt.

Im HAS gelten für Drehimpuls \underline{L} und kinetische Energie der Rotation besonders einfache Beziehungen

$$\underline{L}_i = \sum_{k=1}^3 \theta_{ik} \omega_k = \sum_{k=1}^3 \theta_i \delta_{ik} \omega_k = \underline{\theta}_i \omega_i \quad (7.10a)$$

$$\underline{T}_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \omega_i L_i = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 \omega_i \theta_i \delta_{ik} \omega_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \theta_i \omega_i^2 = \frac{1}{2} (\theta_1 \omega_1^2 + \theta_2 \omega_2^2 + \theta_3 \omega_3^2) \quad (7.10b)$$

(7.10a) unterstreicht noch einmal, dass die beiden Vektoren \underline{L} und $\underline{\omega}$ i.a. nicht parallel sind.

Wie nun ist $\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ zu wählen (um welche Achse muss SK rotieren), damit der Drehimpuls in Richtung der Drehachse zeigt, d.h. $\underline{L} = \underline{\underline{\theta}} \cdot \underline{\omega} = \theta \underline{\omega}$ gilt?

Um diese Frage zu beantworten, lösen wir die Eigenwertgleichung

$$\underline{\underline{\theta}} \cdot \underline{\omega} = \theta \underline{\omega}. \quad (7.11)$$

Da $\underline{\underline{\theta}}$ eine symmetrische Matrix ist, sind die Eigenwerte (die Hauptträgheitsmomente θ_i) reell und die Eigenvektoren stehen senkrecht aufeinander; sie bilden das gesuchte KKS aus den Hauptträgheitsachsen. Die Diagonalisierung von $\underline{\underline{\theta}}$ ist stets möglich. Sie geschieht über

Rotationsmatrizen $\underline{\underline{A}}$, deren Spalten aus den Eigenvektoren von $\underline{\underline{\theta}}$ bestehen ($\underline{\underline{\tilde{\theta}}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{\theta}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1}$, vgl. Vorlesung Lineare Algebra und Kapitel Schwingungen in Systemen mit vielen Freiheitsgraden).

Die charakteristische Gleichung

$$\begin{vmatrix} \theta_{xx} - \theta & \theta_{xy} & \theta_{xz} \\ \theta_{yx} & \theta_{yy} - \theta & \theta_{yz} \\ \theta_{zx} - \theta & \theta_{zy} & \theta_{zz} - \theta \end{vmatrix} = 0 \quad (7.12)$$

ist ein Polynom dritten Grades mit drei reellen Wurzeln θ_1 , θ_2 und θ_3 . Eingesetzt in die Eigenwertgleichung finden wir jeweils das Verhältnis $\omega_x^{(i)} : \omega_y^{(i)} : \omega_z^{(i)}$ und damit die Orientierung der i -ten Hauptträgheitsachse ($i = 1, 2, 3$).

Beispiele/Spezialfälle

□ Asymmetrischer Kreisel: $\theta_1 \neq \theta_2 \neq \theta_3$

Alle Hauptträgheitsmomente sind voneinander verschieden.

□ Symmetrischer Kreisel: $\theta_1 = \theta_2 = \theta \neq \theta_3$

In diesem Fall sind beliebige Linearkombinationen der Eigenvektoren $\underline{\underline{\omega}}_1$ und $\underline{\underline{\omega}}_2$ von $\underline{\underline{\theta}}$ ebenfalls Eigenvektoren, denn aus $\underline{\underline{\theta}} \cdot \underline{\underline{\omega}}^{(1)} = \theta \underline{\underline{\omega}}^{(1)}$ und $\underline{\underline{\theta}} \cdot \underline{\underline{\omega}}^{(2)} = \theta \underline{\underline{\omega}}^{(2)}$ folgt

$\underline{\underline{\theta}} \cdot (\alpha \underline{\underline{\omega}}^{(1)} + \beta \underline{\underline{\omega}}^{(2)}) = \theta (\alpha \underline{\underline{\omega}}^{(1)} + \beta \underline{\underline{\omega}}^{(2)})$. Deshalb können wir zwei beliebige senkrecht aufeinanderstehende Vektoren aus der durch $\underline{\underline{\omega}}_1$ und $\underline{\underline{\omega}}_2$ aufgespannten Ebene und einen senkrecht auf dieser Ebene stehenden Vektor als Hauptträgheitsachsen wählen.

□ Kugelkreisel: $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta$

Jeder orthogonale Achsensatz durch den Schwerpunkt ist ein Hauptachsensystem.

Zwischenfazit:

1) Zur Beschreibung der Bewegung eines starren Körpers verwenden wir zwei Bezugssysteme

raumfestes Koordinatensystem (RKS)
Laborsystem, Inertialsystem

körperfestes Koordinatensystem (KKS)
mitrotierend, kein Inertialsystem

im RKS "Physik einfach"

im KKS "Physik schwieriger"

Beispiel: im kräftefreien Fall $\underline{L}_{(RKS)} = \text{const}$,
aber dafür sind $\theta_{ik} = \theta_{ik}(t)$ zeitabhängig!

Elemente des Trägheitstensors sind bei
gewähltem KKS zeitunabhängig, $\theta_{ik} = \text{const}$.

2) Der Trägheitstensor $\underline{\underline{\theta}}$ beschreibt die Trägheitseigenschaften des starren Körpers bezüglich Rotation; er ist symmetrisch. Hinsichtlich der Translation ist der starre Körper ein Massepunkt, der die Gesamtmasse im Schwerpunkt vereinigt.

3) Die drei reellen, positiven Eigenwerte der Matrix $\underline{\underline{\theta}}$ sind die Hauptträgheitsmomente, die entsprechenden Eigenvektoren die Hauptträgheitsachsen.

Nur bei Rotation um eine Hauptträgheitsachse sind \underline{L} und $\underline{\omega}$ parallel zueinander.

4) Nützliche Entsprechungen:

Rotation

Translation

$$\underline{L} = \underline{\underline{\theta}} \cdot \underline{\omega} \quad \leftrightarrow$$

$$\underline{p} = m \underline{v}$$

$$T_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{\underline{\theta}} \cdot \underline{\omega}^T \quad \leftrightarrow$$

$$T = \frac{1}{2} \underline{v} \cdot m \underline{v}$$

$$\frac{d\underline{L}}{dt} = \underline{M} \quad \leftrightarrow$$

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = \underline{F}$$

5) Die Lagrange-Funktion des starren Körpers lautet im RKS

$$L = \frac{M}{2} \underline{V}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 \theta_{ik} \omega_i \omega_k - U$$

wenn der Ursprung des KKS in der Schwerpunkt des starren Körpers gelegt wird

7.4 Der kräftefreie Kreisel. Die Euler'schen Gleichungen

Welche Bewegungen sind für kräftefreie Kreisel, also in der Raumstation oder im freien Fall (Fallturm) möglich?

Für den freien Kreisel gilt Drehimpulserhaltung

$$0 = \underline{\underline{M}} = \frac{d}{dt} \underline{\underline{L}}_{(RKS)} = \frac{d}{dt} \underline{\underline{L}}_{(KKS)} + \underline{\underline{\omega}} \times \underline{\underline{L}}_{(KKS)} = 0 \quad (7.13)$$

(Erinnere: Für jeden Vektor $\underline{\underline{A}}(t)$ ist $\frac{d\underline{\underline{A}}}{dt} = \frac{d\underline{\underline{A}}'}{dt} + \underline{\underline{\omega}} \times \underline{\underline{A}}'$ beim Übergang in ein um die Achse

$\underline{\underline{\omega}}(t)$ rotierendes Koordinatensystem). Daraus folgen mit $\underline{\underline{L}}_{(KKS)} =: \underline{\underline{L}} = \underline{\underline{\theta}} \cdot \underline{\underline{\omega}}$ unter

Berücksichtigung der Zeitunabhängigkeit des Trägheitstensors im KKS

$$\underline{\underline{\theta}} \cdot \underline{\underline{\dot{\omega}}} + \underline{\underline{\omega}} \times (\underline{\underline{\theta}} \cdot \underline{\underline{\omega}}) = 0. \quad \rightarrow \text{die Euler'schen Gleichungen des freien Kreisels.} \quad (7.14)$$

Das sind **nichtlineare** gekoppelte ODE erster Ordnung zur Bestimmung zeitlichen Änderung der Drehachse $\underline{\underline{\omega}}(t)$ mit den konstanten Komponenten des Trägheitstensors als Parameter.

Im HAS vereinfachen sich die Euler'schen Gleichungen, da

$$\underline{\underline{\theta}} = (\theta_i \delta_{ik}) = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 \end{pmatrix}. \text{ Mit } \underline{\underline{\omega}} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \underline{\underline{\dot{\omega}}} = \begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} \text{ folgt}$$

$$\underline{\underline{\theta}} \cdot \underline{\underline{\omega}} = \begin{pmatrix} \theta_1 \omega_1 \\ \theta_2 \omega_2 \\ \theta_3 \omega_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\omega}} \times \underline{\underline{\theta}} \cdot \underline{\underline{\omega}} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1 \theta_1 & \omega_2 \theta_2 & \omega_3 \theta_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} (\theta_3 - \theta_2) \omega_2 \omega_3 \\ (\theta_1 - \theta_3) \omega_1 \omega_3 \\ (\theta_2 - \theta_1) \omega_1 \omega_2 \end{pmatrix}.$$

Damit haben die Euler'schen Gleichungen des freien Kreisels im HAS die Form

$$\begin{aligned} \theta_1 \dot{\omega}_1 + (\theta_3 - \theta_2) \omega_2 \omega_3 &= 0 \\ \theta_2 \dot{\omega}_2 + (\theta_1 - \theta_3) \omega_1 \omega_3 &= 0 \\ \theta_3 \dot{\omega}_3 + (\theta_2 - \theta_1) \omega_1 \omega_2 &= 0 \end{aligned} \quad (7.15)$$

(beachte die zyklischen Vertauschungen der Indices).