

- **Beispiel:**
Eindimensionale Bewegung eines MP unter dem Einfluss einer Kraft $F(x)$, [L^2/I , § 11]

Newton'sche Bewegungsgleichung (NBG):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

Bei dieser Bewegung gilt der Energieerhaltungssatz

$$\frac{m}{2} (\dot{x}(t))^2 + U(x(t)) = E = \text{const} .$$

aus, der im Unterschied zur NBG eine ODE erster Ordnung für die gesuchte Funktion/Bahnkurve $x(t)$ ist. Stellen wir im Energieerhaltungssatz nach dx/dt um, trennen die Variablen und integrieren, so folgt für die zu $x(t)$ inverse Funktion

$$t(x) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + c .$$

Die Werte für die Gesamtenergie E und die Integrationskonstante c werden aus den Anfangsbedingungen ermittelt.

Finite eindimensionale Bewegungen zwischen den Umkehrpunkten x_i , $E = U(x_i)$, sind periodisch ($E < U(x)$ ist der klassisch verbotene Bereich der Bewegung). Für die Schwingungsdauer/Periode der finiten Bewegung erhalten wir den Ausdruck

$$T = 2 \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = T(E) .$$

Im allgemeinen hängt die Schwingungsdauer T von der Energie E , also von der Amplitude, der Schwingung ab.

- **Beispiel:** Schwingungen kleiner Amplitude um eine stabile Gleichgewichtslage $x = a$.

In diesem Fall ist

$$U(x) = U(a) + \overbrace{U'(a)}^0 (x-a) + \frac{1}{2} U''(a) (x-a)^2 + \dots \approx U(a) + \overbrace{\frac{U''(a)}{2}}{=:k>0} (x-a)^2$$

und aus der allgemeinen Formel folgt das bekannte Ergebnis für harmonische Schwingungen

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad \rightarrow \text{ZEIGEN}$$

In diesem Fall ist die Periode T unabhängig von der Amplitude der Schwingung.

□ **Beispiel:** Ebenes mathematisches Pendel

Die detaillierte Rechnung führt auf die Bewegungsgleichung $\ell \ddot{\varphi}(t) + g\varphi(t) = 0$ für den Auslenkungswinkel $\varphi(t)$ und den Ausdruck

$$T(\varphi_0) = \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{dz}{\sqrt{1 - \sin^2(\varphi_0/2) \sin^2 z}} \stackrel{\sin \frac{\varphi_0}{2} \approx \frac{\varphi_0}{2} \ll 1}{=} 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16} + \dots \right).$$

für die Schwingungsdauer. Dabei ist ℓ die Pendellänge, g die Schwerebeschleunigung und (vgl. 2. Übungsblatt).

Eine interessante Frage ist, ob ein Pendel konstruiert werden kann, dessen Schwingungsdauer unabhängig von der Amplitude ist und das deshalb besonders geeignet für Pendeluhren sein sollte. Ein derartiges Pendel wurde Christian Huygens entdeckt. Es handelt sich um das sogenannte *Zykloidenpendel*.

Wer bei Wikipedia als Suchbegriff "Zykloidenpendel" eingibt, den erwartet eine interessante Exkursion in die Epoche der Anfänge der Newton'schen Mechanik. Newton bezeichnete Christian Huygens (1629-1695) als den "eleganteste Mathematiker seiner Zeit".

Zusatz: Kleine Änderungen $\delta U(x)$ im Potenzial $U(x)$, $\delta U(x) \ll U(x)$, führen zu folgender Korrektur der Schwingungsdauer

$$\begin{aligned} \delta T &= \sqrt{2m} \left[\int_{x_1+\delta x_1}^{x_2+\delta x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x) - \delta U(x)}} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \right] = \\ &= 2\sqrt{2m} \frac{\partial}{\partial E} \left[\int_{x_1+\delta x_1}^{x_2+\delta x_2} dx \sqrt{E - U(x) - \delta U(x)} - \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{E - U(x)} \right] \approx \\ &\approx 2\sqrt{2m} \frac{\partial}{\partial E} \left[\int_{x_1+\delta x_1}^{x_2+\delta x_2} dx \sqrt{E - U(x)} - \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\delta U(x)}{\sqrt{E - U(x)}} - \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{E - U(x)} \right] \approx \\ &\approx -\sqrt{2m} \frac{\partial}{\partial E} \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\delta U(x)}{\sqrt{E - U(x)}} \end{aligned}$$

Im Fall des schwach anharmonischen Oszillators mit der Bewegungsgleichung

$m\ddot{x} + kx + m\beta x^3 = 0 \quad \rightarrow$ Duffing-Oszillator ohne Reibung (Berliner Ingenieur)

ergibt sich daraus mit $U(x) = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}$, $\delta U(x) = \frac{m\beta x^4}{4}$

eine Korrektur der Schwingungsdauer von $T(E) \approx \frac{2\pi}{\omega_0} - \frac{3\pi\beta E}{2m\omega_0^5}$. (PRÜFEN)

Interessantes über das Resonanzverhalten erzwungener anharmonischer Schwingungen findet sich in [L²/I, § 29].

1.4.3 Beschleunigte Bezugssysteme, Trägheitskräfte ("Scheinkräfte")

Fall A: Das Koordinatensystem Σ' bewege sich translatorisch mit konstanter Relativbeschleunigung $\underline{a} = \text{const}$ gegenüber dem Inertialsystem Σ . In Σ hat die NBG die Form

$$\underline{F} = m\underline{\ddot{r}} = m(\underline{\ddot{r}}_0 + \underline{\ddot{r}}') = m\underline{a} + m\underline{\ddot{r}}'.$$

Abb.

Aus Sicht eines Beobachters in Σ' (dem beschleunigten KS) gilt

$$m\underline{\ddot{r}}' = \underbrace{\underline{F}}_{\text{eingeprägte Kraft}} + \underbrace{\underline{F}_T}_{\text{Trägheitskraft}}$$

mit $\underline{F}_T = -m\underline{a} \rightarrow$ Trägheitskraft/Scheinkraft infolge Beschleunigung von Σ' .

Fazit: Bei der Formulierung der NBG im beschleunigten Koordinatensystem ist die Scheinkraft \underline{F}_T zu berücksichtigen.

■ **Beispiel:** Beobachter im frei fallenden Fahrstuhl

Unter seinem eigenen Gewicht $\underline{F} = m_{(S)}\underline{g}$ erfährt Beobachter im Fahrstuhl die Beschleunigung

$$m_{(T)}\underline{\ddot{r}} = m_{(S)}\underline{g} + \underline{F}_T = m_{(S)}\underline{g} - m_{(T)}\underline{g} = (m_{(S)} - m_{(T)})\underline{g} = 0,$$

vorausgesetzt, schwere Masse $m_{(S)}$ und träge Masse $m_{(T)}$ stimmen überein.

■ anfahrender/abbremsender Bus

Fall B: Rotierende Koordinatensysteme/Bezugssysteme

Mit der Erde verbundene Koordinatensysteme ("Laborsysteme") sind schon wegen der Erdrotation keine Inertialsysteme.

Das Koordinatensystem Σ' mit $\underline{r}'(t) = x_i'(t) \underline{e}_i'(t)$ (Summenkonvention) rotiere gegen das Inertial(!)system Σ mit $\underline{r}(t) = x_i(t) \underline{e}_i$, wobei die momentane Drehachse $\underline{\omega}(t)$ durch den gemeinsamen Koordinatenursprung verlaufe und somit $\underline{r}(t) = \underline{r}'(t)$ gelte.

Momentangeschwindigkeit: Aus $\underline{r}(t) = \underline{r}'(t)$ folgt, also

$$\underbrace{\dot{\underline{r}}(t) = \dot{x}_i(t) \underline{e}_i}_{\text{Geschwindigkeit } \dot{\underline{r}}(t) \text{ aus Sicht eines mit } \Sigma \text{ verbundenen Beobachters}} = \underbrace{\dot{x}_i'(t) \underline{e}_i'(t)}_{\text{G. } \dot{\underline{r}}'(t) \text{ aus Sicht eines mit } \Sigma' \text{ verbundenen Beobachters}} + \underbrace{x_i'(t) \dot{\underline{e}}_i'(t)}_{\text{von } \Sigma \text{ aus gemessene G. eines MP, der mit } \Sigma' \text{ starr verbunden rotiert, dessen Koordinaten } x_i' \text{ also const.}}$$

Zur Berechnung von $\dot{\underline{e}}_i'(t) = \frac{d\underline{e}_i'(t)}{dt}$ verwenden wir den allgemeinen Ausdruck für die

Geschwindigkeit bei starrer Rotation um eine Drehachse $\underline{\omega}(t)$ durch den Koordinatenursprung (vgl. MMP):

$$d\varphi = \omega dt$$

$$dr = d\varphi r \sin \alpha = \omega r \sin \alpha dt$$

↑
Kreisbogen zu $d\varphi$ am
Kreis mit Radius $r \sin \alpha$

dr ist tangential zur Bahnkurve gerichtet, die Bahnebene steht senkrecht zu momentanen Drehachse $\underline{\omega}(t)$ und zum Radiusvektor \underline{r} . Deshalb gilt

$$\frac{d\underline{r}(t)}{dt} = \dot{\underline{r}}(t) = \underline{\omega} \times \underline{r} .$$

Also ist $\frac{d\underline{e}_i'(t)}{dt} = \dot{\underline{e}}_i'(t) = \underline{\omega} \times \underline{e}_i'$ und damit

$$\underline{\dot{r}}(t) = \underline{\dot{r}}'(t) + \underline{\omega}(t) \times \underline{r}'(t) .$$

Für die Beschleunigung erhalten wir aus $\dot{\underline{r}}(t) = \dot{x}_i(t) \underline{e}_i = \dot{x}_i'(t) \underline{e}'(t) + x_i'(t) \dot{\underline{e}}_i'(t)$

$$\begin{aligned} \ddot{\underline{r}}(t) &= \ddot{x}_i(t) \underline{e}_i = \frac{d}{dt} (\dot{x}_i'(t) \underline{e}'(t) + x_i'(t) \dot{\underline{e}}_i'(t)) = \frac{d}{dt} (\dot{x}_i'(t) \underline{e}'(t) + \underline{\omega}(t) \times x_i'(t) \underline{e}_i'(t)) = \\ &= \ddot{x}_i'(t) \underline{e}_i'(t) + \underbrace{\dot{x}_i'(t) \dot{\underline{e}}_i'(t)}_{\underline{\omega}(t) \times \underline{e}_i'(t)} + \dot{\underline{\omega}}(t) \times x_i'(t) \underline{e}_i'(t) + \underline{\omega}(t) \times \dot{x}_i'(t) \underline{e}_i'(t) + \underline{\omega}(t) \times x_i'(t) \dot{\underline{e}}_i'(t) = \\ &= \ddot{x}_i'(t) \underline{e}_i'(t) + \underbrace{\dot{x}_i'(t) \underline{\omega}(t) \times \underline{e}_i'(t)} + \dot{\underline{\omega}}(t) \times x_i'(t) \underline{e}_i'(t) + \underbrace{\underline{\omega}(t) \times \dot{x}_i'(t) \underline{e}_i'(t)} + \underline{\omega}(t) \times x_i'(t) \underline{\omega}(t) \times \underline{e}_i'(t) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\ddot{\underline{r}}(t) = \ddot{\underline{r}}'(t) + 2\underline{\omega} \times \dot{\underline{r}}' + \dot{\underline{\omega}} \times \underline{r}' + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}').$$

Sei \underline{F} die eingeprägte Kraft im Inertialsystem Σ (also $\underline{F} = m \ddot{\underline{r}}$). Dann lautet die NBG im rotierenden Bezugssystem/Nichtinertialsystem

$$m \ddot{\underline{r}}' = \underbrace{\underline{F}'}_{\text{eingeprägte Kraft}} - \underbrace{2m \underline{\omega} \times \dot{\underline{r}}'}_{\text{Coriolis-Kraft}} - \underbrace{m \dot{\underline{\omega}} \times \underline{r}'}_{\text{Kraft aus Winkelbeschleunigung}} - \underbrace{m \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}')}_{\text{Zentrifugalkraft}}.$$

Fazit: Im rotierenden NIS Σ' wird die Beschleunigung des MP durch die eingeprägte Kraft und drei Trägheitskräfte bestimmt.

(i) Coriolis-Kraft: $\underline{F}_C = -2m \underline{\omega} \times \dot{\underline{r}}'$

Die Coriolis-Kraft wirkt nur auf MP/Körper, die sich bezüglich des rotierenden KS bewegen, also nur dann, wenn $\dot{\underline{r}}' \neq 0$ und wenn $\underline{\omega}$ und $\dot{\underline{r}}'$ nicht die gleiche Wirkungslinie besitzen.

Infolge der Coriolis-Kraft werden horizontale Bewegungen auf der Nord-/Südhalbkugel nach rechts/links (in Bewegungsrichtung) abgelenkt, also nach Steuerbord/Backbord/.

- **Beispiel:** Wirbel in Hoch- und Tiefdruckgebieten auf der Nord- bzw. Südhalbkugel
- **Beispiel:** Foucault'sches Pendel

Drehung der Schwingungsebene des Pendels. Sie ist an den Polen maximal, am Äquator Null. Die Erdkugel dreht sich mit $\underline{\omega}_E$ unter dem Pendel weg (aus Sicht von Σ). Im mit der Erde verbundenen Laborsystem Σ' dreht sich die Schwingungsebene des Pendels.

■ **Beispiel:** Freier Fall auf der rotierenden Erde.

Beim freien Fall aus 100 m Höhe beträgt die Ostablenkung auf der Nordhalbkugel etwa 2 cm.

(ii) Zentrifugalkraft: $\underline{F}_Z = -m\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}')$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Richtung } \perp \text{ von Drehachse weg} \\ \text{Betrag } F_Z = m\omega^2 r' \sin \alpha \end{array} \right.$

Die Zentrifugalkraft/Fliehkraft ist senkrecht von der Drehachse $\underline{\omega}$ weg gerichtet und ihr Betrag ist gleich

$$F_Z = m\omega^2 r' \sin \alpha$$

wobei α der Winkel zwischen \underline{r}' und $\underline{\omega}$ ist.

Beweis: Aus $\underline{a} \times \underline{b} \times \underline{c} = \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b})$ folgt

$$\underline{F}_Z = -m\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}') = -m[\underline{\omega}(\underline{\omega} \cdot \underline{r}') - \underline{r}'(\underline{\omega} \cdot \underline{\omega})] = -m\omega^2 \left[\frac{\underline{\omega}}{\omega} \left(\frac{\underline{\omega} \cdot \underline{r}'}{\omega} \right) - \underline{r}' \right]$$

und für F_Z^2

$$\begin{aligned} F_Z^2 &= (m\omega^2)^2 \left[\underline{r}' - \frac{\underline{\omega}}{\omega} \left(\frac{\underline{\omega} \cdot \underline{r}'}{\omega} \right) \right]^2 = (m\omega^2)^2 \left[\underline{r}'^2 - \frac{2\underline{r}' \cdot \underline{\omega}}{\omega} \left(\frac{\underline{\omega} \cdot \underline{r}'}{\omega} \right) + \frac{\underline{\omega} \cdot \underline{\omega}}{\omega^2} \left(\frac{\underline{\omega} \cdot \underline{r}'}{\omega} \right)^2 \right] = \\ &= (m\omega^2)^2 \left[\underline{r}'^2 - \left(\frac{\underline{r}' \cdot \underline{\omega}}{\omega} \right)^2 \right] = (m\omega^2)^2 \underline{r}'^2 \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

(rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen r' , der Projektion $\frac{\underline{r}' \cdot \underline{\omega}}{\omega}$ von r' auf $\underline{\omega}$ und $r' \sin \alpha$).

Steht $\underline{\omega}$ senkrecht auf \underline{r}' folgt der bekannte Ausdruck

$$F_Z = m\omega^2 r' = m \frac{v^2}{r'}$$

■ ■ Beispiele

■ Erdabplattung

Der polare Erdradius ist etwa 21,5 km kleiner als der äquatoriale.

■ Abhängigkeit der Erdbeschleunigung vom Breitengrad

Die heutige Gestalt der Erde zeigt in erstarrter Form den rotierenden, ehemals flüssigen Planeten, dessen (ehemals flüssige) Oberfläche sich senkrecht zu $\underline{g}_{\text{res}}$ eingestellt und so die abgeplattete Erdkugel (\rightarrow Geoid) entstehen lassen hat. Die Normale zur realen Erdoberfläche zeigt in Richtung

$$\underline{g}_{\text{res}} \approx \underline{g} + \ddot{\underline{r}}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ R \omega^2 \cos \alpha \sin \alpha \\ g - R \omega^2 \cos^2 \alpha \end{pmatrix},$$

die von der radialen Richtung zum Erdmittelpunkt abweicht; diese Abweichung ist von der geografischen Breite α abhängig.

Näherung: Abweichungen sind $O(\omega^2)$, also ohne Zentrifugalkraft. Zusätzlich muss der Abstand zur Erdoberfläche gering sein, also r' klein.

Die Komponente der Erdbeschleunigung in Richtung der Normalen zum Geoid ist

$$g_n(\alpha) = (9,832 - 0,052 \cos^2 \alpha) \text{ ms}^{-2} \quad \text{mit} \quad g_n(45^\circ) \approx 9,80665 \text{ ms}^{-2} \quad (\text{in Meereshöhe}).$$

Am Äquator ist der von der geografischen Breite abhängige Korrekturterm maximal, die Abweichung beträgt etwa $5^\circ/\infty$. Deshalb geht eine Pendeluhr am Äquator täglich $3 \frac{1}{2}$ Minuten zu einer identischen Uhr an den Polen nach.

Detaillierte Rechnungen vgl. z.B. in: Nolting Band 1, S. 123, Aufgabe 2.2.2. Obwohl die Bewegungsgleichung im Inertialsystem einfacher sind, beschreibt man Bewegungen auf der rotierenden Erde in einem mit der Erde rotierenden Nichtinertialsystem, dem Laborssystem.

■ Hammerwerfen

(iii) Kraft infolge Winkelbeschleunigung: $\underline{F}_\omega = -m \underline{\dot{\omega}} \times \underline{r}'$

Diese Kraft ist nur wirksam, wenn $\underline{\omega}$ von der Zeit abhängt, also wenn die Richtung der momentanen Drehachse und/oder die Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ zeitabhängig ist/sind.

1.4.4 Grundgesetz der Drehbewegung in der Newton'schen Mechanik

$$\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p} = m \underline{r} \times \dot{\underline{r}} \rightarrow \text{Drehimpuls}$$

$$\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F} \rightarrow \text{Drehmoment}$$

Unter Verwendung der NBG $\underline{F} = \frac{d\underline{p}}{dt}$ folgt

$$\underline{r} \times \underline{F} = \underline{r} \times \frac{d\underline{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\underline{r} \times \underline{p}) - \underbrace{\frac{d\underline{r}}{dt} \times \underline{p}}_{\dot{\underline{r}} \times m \dot{\underline{r}} = 0} = \frac{d}{dt}(\underline{r} \times \underline{p})$$

also

$$\underline{M} = \frac{d\underline{L}}{dt} \rightarrow \text{Grundgesetz der Drehbewegung in der Newton'schen Mechanik}$$

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist gleich dem resultierenden Drehmoment.

1.4.5 II. Newton'sches Axiom (actio et reactio)

Reaktions- oder Wechselwirkungsprinzip, Gesetz von Wirkung und Gegenwirkung:

Die von zwei Körpern aufeinander ausgeübten Wirkungen (\rightarrow Kräfte und /oder Momente) sind stets betragsmäßig gleich groß und entgegengesetzt gerichtet.

■ **Beispiel** Gewicht einer Kugel und Gegenkraft der Auflage

$$\underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21}$$

■ **Beispiel:** Vergleiche die trägen Massen zweier Körper durch Messung der Beschleunigungen, die ihnen durch dieselbe Kraft verliehen wird.

Mögliche Realisierung: Gespannte Feder (alle anderen Einflüsse seien vernachlässigbar)
Wird die gespannte Feder durchtrennt, liefert die Messung der Beschleunigungen unabhängig

von der Größe der Kraft $F = F_1 = F_2$ das Ergebnis $\frac{a_2}{a_1} = \frac{m_1}{m_2}$. Erneut erkennt man, dass die

träge Masse eine Eigenschaft des Körpers unabhängig von der wirkenden Kraft ist.

1.4.6 Superpositionsprinzip der Kräfte (wurde von Newton als Zusatz zu den Axiomen formuliert)

Wirken auf einen Massepunkt mehrere Kräfte \underline{F}_i , so bewegt er sich so, als wirke auf ihn allein die vektorielle Summe $\underline{F} = \sum_i \underline{F}_i$.

■ Kräfteparallelogramm