

1.4.7 Das Newton'sche Gravitationsgesetz

Eine Punktmasse m_1 am Ort \underline{r}_1 übt auf eine Punktmasse m_2 am Ort \underline{r}_2 die Kraft (Axiom)

$$\underline{F}_G = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3} (\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$$

aus. Hier bezeichnet $\gamma = 6,67259 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ wieder die universelle Gravitationskonstante.

Die Gravitationskraft wirkt anziehend in Richtung der Verbindungslinie beider Massen. Ihr Betrag hängt nur vom Abstand der Punktmassen $|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|$ ab, er fällt proportional zu $|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^{-2}$. Die Gravitationswechselwirkung ist universell, langreichweitig, nicht abschirmbar und, im Vergleich zur elektrostatischen Wechselwirkung, „schwach“. Für zwei ruhende Elektronen ergibt sich beispielsweise unabhängig vom Abstand

$$\frac{\text{gravitative Anziehung}}{\text{elektrostatische Abstoßung}} \approx \frac{1}{4,17} \cdot 10^{-4} .$$

(nachprüfen). Dennoch dominiert im astronomischen Maßstab die Gravitation, da die kosmischen Objekte in der Regel elektrisch neutral sind.

- **Das Gravitationsfeld**

(Falls erforderlich, Kapitel Felder, speziell Vektorfelder, aus MMP16 wiederholen.)

Wir betrachten zwei MP mit den Massen m und M und legen den Ursprung des KS in M .

$$\begin{array}{ll} \text{Gravitationskraft: } \underline{F}_G(\underline{r}) = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\underline{r}}{r} , & \text{Betrag: } F_G(r) = -\gamma \frac{mM}{r^2} \\ \rightarrow \text{Zentralfeld} & \rightarrow \text{kugelsymmetrisch.} \end{array}$$

Das Kraftfeld \underline{F}_G ist wirbelfrei, da $\text{rot } \underline{F}_G(\underline{r}) = 0$ (zur Übung noch einmal überprüfen).

Damit ist das Gravitationsfeld konservativ. Die im Feld von M an der Masse m verrichtete Arbeit (sie erhöht die potenzielle Energie $U(r)$ der Masse m) kann als Wegintegral entlang

eines beliebigen Weges zwischen einem Bezugspunkt \underline{r}_0 zum Beobachtungspunkt \underline{r} berechnet werden

$$U(\underline{r}) - U(\underline{r}_0) = - \int_C \underline{dr} \cdot \underline{F}_G(\underline{r}) \stackrel{\substack{= \\ \text{parametrisiere } C \text{ durch Radial-} \\ \text{strahl } \underline{r}(\lambda) = \lambda \underline{e}_r, \underline{dr} = d\lambda \underline{e}_r}}{\gamma m M \int_{r_0}^r \frac{d\lambda}{\lambda^2} \underline{e}_r \cdot \underline{e}_r} = - \frac{1}{\lambda} \Big|_{r_0}^r = -\gamma m M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right).$$

(vgl. MMP, Kapitel Kurvenintegrale). Wird der Bezugspunkt r_0 ins Unendliche gelegt, folgt

$$U(\underline{r}) = -\gamma \frac{mM}{r}.$$

Die Größe $U(\underline{r})$, also die potenzielle Energie der Masse m im Gravitationsfeld $\underline{F}_G(\underline{r})$, wird auch als Kepler-Potenzial bezeichnet.

Wir vereinbaren die folgende Terminologie:

$$\underline{F}_G(\underline{r}) = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\underline{r}}{r} = m \underline{g}(\underline{r}) \quad \text{ist die Gravitationskraft zwischen } m \text{ und } M, \quad \underline{g}(\underline{r}) = -\frac{\gamma M}{r^2} \frac{\underline{r}}{r} \text{ die}$$

Feldstärke des Gravitationsfeldes von M . Da unabhängig von der Masse des Probekörpers m , ist $\underline{g}(\underline{r})$ besser als die Gravitationskraft $\underline{F}_G(\underline{r})$ oder die potenzielle Energie $U(\underline{r})$ zur

Beschreibung des von der Masse M am Ort \underline{r} erzeugten Gravitationsfeldes geeignet. Für die potenzielle Energie des Probeteilchens im konservativen Kraftfeld $\underline{F}_G(\underline{r})$ können wir

$$U(\underline{r}) = -\gamma \frac{mM}{r} = m\phi(\underline{r}) \text{ schreiben, wobei wir das skalare Potenzial}$$

$$\underline{\phi}(\underline{r}) = -\frac{\gamma M}{r} \rightarrow \text{Gravitationspotenzial}$$

$$\text{einführen. Dann gilt (wie oben) } \underline{g}(\underline{r}) = -\text{grad } \phi(\underline{r}) = -\underline{\nabla} \phi(\underline{r}) = -\frac{d\phi}{dr} \underline{e}_r = -\frac{\gamma m M}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}.$$

Man beachte die formale Analogie zum elektrostatischen Feld einer ruhenden Punktladung Q ,

$$\text{das über die Coulomb-Kraft } \underline{F}_C(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \frac{\underline{r}}{r} \text{ zwischen } Q \text{ und einer Probeladung } q$$

$$\text{ausgemessen werden kann. Die elektrische Feldstärke } \underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\underline{r}}{r} \text{ mit } \underline{F}_C(\underline{r}) = q\underline{E}(\underline{r})$$

entspricht der Feldstärke des Gravitationsfeldes $\underline{g}(\underline{r})$, und das Coulomb-Potenzial ist

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, \text{ wobei wieder } \underline{E}(\underline{r}) = -\text{grad } \phi(\underline{r}) \text{ gilt.}$$

N an den Orten \underline{r}_i befindliche ruhende Punktmassen m_i erzeugen am Ort \underline{r} ein Gravitationsfeld, dessen Gravitationspotenzial sich nach dem Superpositionsprinzip in der Form

$$\phi(\underline{r}) = -\gamma \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|\underline{r} - \underline{r}_i|}$$

darstellen lässt.

Entsprechend erhalten wir im Fall einer lokalisierten kontinuierlichen Masseverteilung mit der Massendichte $\rho(\underline{r}')$ für das Gravitationspotenzial im Beobachtungspunkt \underline{r}

$$\phi(\underline{r}) = -\sum_{i=1}^N \gamma \frac{\overbrace{\rho(\underline{r}_i) \Delta V_i}^{m_i}}{|\underline{r} - \underline{r}_i|} \xrightarrow[\Delta V_i \rightarrow 0]{\text{im Grenzfall}} \underline{\phi(\underline{r}) = -\gamma \int d^3 r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}}.$$

Bemerkung: Wir hätten auch die Feldstärken $\underline{g}(\underline{r})$ überlagern können und das Integral

$$\underline{g}(\underline{r}) = -\gamma \int d^3 r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^2} \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

entspräche dann genau dem Newton'schen Superpositionsprinzip im Anschluss an das III.

Axiom. Meist ist es jedoch erheblich bequemer, $\underline{g}(\underline{r})$ über $\underline{g}(\underline{r}) = -\underline{\nabla} \phi(\underline{r})$ zu bestimmen, da sich skalare Volumenintegrale leichter als vektorielle ausrechnen lassen.

■ Beispiel: Gravitationsfeld der Erde

Wir betrachten die Erde näherungsweise als Kugel vom Radius R mit homogener

Massedichte $\rho(\underline{r}') = \frac{M}{\frac{4\pi}{3} R^3}$ und wählen sphärische Koordinaten (r', ϑ, φ) mit Ursprung im

Erdmittelpunkt und z-Achse in Richtung des Beobachtungspunktes \underline{r} . Dann gilt

$$\begin{aligned} \phi(\underline{r}) &= -\gamma \int d^3 r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = \\ &= -\gamma \frac{M}{\frac{4\pi}{3} R^3} \int \frac{d^3 r'}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \stackrel{d^3 r' = r'^2 dr' \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}{=} -\gamma \frac{M}{\frac{4\pi}{3} R^3} \int_0^R dr' r'^2 \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos \vartheta}} \stackrel{\vee}{=} \end{aligned}$$

Für die Integration über den Winkel ϑ zwischen \underline{r} und \underline{r}' finden wir mit Hilfe der Relation

$$\frac{d}{d\vartheta} \left(\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta} \right) = \frac{1}{2} \frac{(-2)rr'(-\sin \vartheta)}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta}} = \frac{rr' \sin \vartheta}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta}}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{3\gamma M}{4\pi R^3} 2\pi \int_0^R dr' r'^2 \frac{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta}}{rr'} \Big|_0^\pi = -\frac{3\gamma M}{2R^3} \int_0^R dr' \frac{r'}{r} \left(\sqrt{r^2 + r'^2 + 2rr'} - \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'} \right) = \\ &= -\frac{3\gamma M}{2R^3} \frac{1}{r} \int_0^R dr' r' \left[(r+r') - |r-r'| \right] = \phi(r). \end{aligned}$$

Befindet sich der Beobachtungspunkt außerhalb der Erde/Kugel, ergibt sich wegen $r > r'$

$$\phi(r) = -\frac{3\gamma M}{2R^3} \frac{1}{r} \int_0^R dr' r' \underbrace{\left[(r+r') - (r-r') \right]}_{2r'} = -\frac{3\gamma M}{2R^3} \frac{1}{r} \int_0^R dr' 2r'^2 = -\frac{3\gamma M}{2R^3} \frac{1}{r} \frac{2R^3}{3} = -\frac{\gamma M}{r}$$

→ Außerhalb der Kugel ist das Gravitationsfeld gleich dem einer Punktmasse M im Mittelpunkt der Erde. Aus diesem Grund ist es möglich, für $r > R$ die Erde als Punktmasse zu behandeln (Abweichungen infolge Erdabplattung, inhomogener Dichteverteilung, etc. vernachlässigt).

Fazit: Das Gravitationsfeld der Erde wirkt auf eine Punktmasse außerhalb der Erde so, als wäre die Erdmasse im Erdmittelpunkt vereinigt.

Für Beobachtungspunkte im Inneren der Erde/Kugel zerlegen wir das Integral in einen Beitrag für $0 < r' < r$ und einen Beitrag für $r < r' < R$. Dann folgt

$$\phi(r) = -\frac{3\gamma M}{2R^3} \frac{1}{r} \left(\int_0^r dr' 2r'^2 + \int_r^R dr' r' \underbrace{\left[(r+r') + (r-r') \right]}_{2r} \right) =$$

$$= -\frac{3\gamma M}{2R^3} \frac{1}{r} \left(\frac{2r^3}{3} + 2r \frac{r'^2}{2} \Big|_r^R \right) = -\frac{3\gamma M}{2R^3} \frac{1}{r} \left(rR^2 - \frac{r^3}{3} \right) =$$

$$-\gamma M \left(\frac{3}{2R} - \frac{r^2}{2R^3} \right) = \phi(r)$$

→ zentralsymmetrisch

Aufgabe: Skizziere das Gravitationspotenzial einer Kugel mit der homogenen Massedichte $\rho = 3M/4\pi R^3$

Für die Feldstärke des Gravitationsfeldes erhalten wir

$$\underline{g}(\underline{r}) = -\underline{\nabla} \phi(\underline{r}) = -\frac{d\phi(\underline{r})}{dr} \underline{e}_r = \begin{cases} -\frac{\gamma M}{r^2} \underline{r}, & \text{für } r > R \\ -\frac{\gamma M}{R^3} r \underline{r}, & \text{für } r < R \end{cases}$$

→ Zentralfeld.

Aufgabe: das Gleiche wie oben für die Feldstärke $\underline{g}(\underline{r})$

In der Übung wird die gleiche Aufgabe mit Hilfe des Gauß'schen Satzes

$$\oint_{\partial V} \underline{df} \cdot \underline{g}(\underline{r}) = \int_V d^3r \operatorname{div} \underline{g}(\underline{r}) \text{ gelöst. Man findet durch Berechnung des Flusses von } \underline{g}(\underline{r}) \text{ durch die Kugeloberfläche leicht } \int_{\text{Kugelvolumen}} d^3r \operatorname{div} \underline{g}(\underline{r}) = -4\pi\gamma M = -4\pi\gamma \int_V d^3r \rho(\underline{r}).$$

Daraus folgt im vorliegenden Fall

$$\underbrace{\operatorname{div} \underline{g}(\underline{r})}_{\text{lokale Quellstärke des G-Feldes}} = -4\pi\gamma \underbrace{\rho(\underline{r})}_{\text{Massendichte}} \rightarrow \text{die Massen sind die Quellen des Gravitationsfeldes.}$$

Es stellt sich heraus, dass diese Gleichung nicht nur im betrachteten Beispiel, sondern allgemein gilt. Die zweite Feldgleichung lautet

$$\underline{\operatorname{rot}} \underline{g}(\underline{r}) = 0 \rightarrow \text{Das Gravitationsfeld ist konservativ.}$$

Es besitzt ein skalares Potenzial $\phi(\underline{r})$, wobei $\underline{g}(\underline{r}) = -\underline{\operatorname{grad}} \phi(\underline{r})$.

Durch lokale Quellstärke und lokale Wirbelstärke ist das Gravitationsfeld vollständig bestimmt (Helmholtz'scher Satz). Für das Gravitationspotenzial ergibt sich aus

$$-4\pi\gamma \rho(\underline{r}) = \operatorname{div} \underline{g}(\underline{r}) = \operatorname{div} (-\underline{\operatorname{grad}} \phi(\underline{r})) = -\underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} \phi(\underline{r}) = -\Delta \phi(\underline{r})$$

also

$$\underline{\Delta} \phi(\underline{r}) = 4\pi\gamma \rho(\underline{r}) \rightarrow \text{Poisson-Gleichung.}$$

Letztere folgt übrigens aus den Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie im Grenzfall schwacher Felder.

1.4.8 Äquivalenz von träger und schwerer Masse

Streng genommen sind die in der Newton'schen Bewegungsgleichung auftretenden trägen Massen m_T von den schweren Massen m_s und M_s im Gravitationsgesetz (dort wurde der Index S weggelassen) zu unterscheiden. Neben der Messung der Beschleunigung eines Körpers durch eine auf ihn wirkende Kraft kann auch die Messung seines Gewichts \underline{G} nahe der Erdoberfläche (z.B. mit einer Federwaage) als Messvorschrift für die Masse von Körpern dienen.

Idee: Könnte man nicht neben der Newton'schen Bewegungsgleichung auch das Newton'sche Gravitationsgesetz als Messvorschrift zur Bestimmung der Masse eines Körpers verwenden?

Der Betrag der Schwerkraft auf den an der Feder aufgehängten Probekörper kann aus der Verlängerung Δz der Feder abgelesen werden; die Schwerkraft ist (näherungsweise, s. oben) zum Erdmittelpunkt gerichtet. Folglich ist die Schwerkraft nicht Eigenschaft des Probekörpers allein, sondern eine gemeinsame Eigenschaft des Systems Probekörper/Erde. Um die Schwere als intrinsische Eigenschaft des Probekörpers zu charakterisieren, führen wir die **schwere Masse m_s** ein

$\underline{G} = m_s \underline{g}$ also $m_s \sim |\underline{G}|$). Dabei ist $\underline{g} = -\frac{\gamma M}{r^2} \Big|_{r=R} \underline{e}_r \approx 9,81 \text{ m s}^{-2}$ die Erdbeschleunigung.

Sie ergibt sich wenn wir die Werte für Masse und Radius der Erde $M \approx 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ bzw. $R \approx 6380 \text{ km}$ einsetzen (Ursprung des KS im Erdmittelpunkt, Korrekturen infolge Erdabplattung / geographischer Breite, Bewegung der Erde um die Sonne usw. vernachlässigt).

Zunächst sind die Versuchsbedingungen zur Bestimmung der trägen Masse m_T auf der Basis der NBG und der schweren Masse m_s ausgehend vom Gravitationsgesetz offensichtlich sehr unterschiedlich. Um m_T und m_s miteinander vergleichen zu können, betrachten wir nun die Beschleunigung a eines Körpers infolge seines eigenen Gewichts G . Gemäß der NBG ist dann

$$m_T a = m_s g .$$

Bereits Galilei hatte bei seinen Fallversuchen am schiefen Turm von Pisa beobachtet, dass alle Körper im Gravitationsfeld der Erde gleich schnell fallen. Newton folgerte daraus, dass die Körper beim freien Fall die gleiche Beschleunigung erfahren, also gilt

$$a = \frac{m_s}{m_T} g = \text{const} \rightarrow \underline{\text{für alle Körper ist das Verhältnis aus schwerer und träger Masse gleich!}}$$

Werden m_T und m_s in kg gemessen folgt

$$m_s = m_T =: m \quad \text{\textbf{Äquivalenz von träger und schwerer Masse}}$$

Die Gleichheit von träger und schwerer Masse zählt zu den experimentell am besten gesicherten physikalischen Tatsachen.

Experimentelle zur Verifikation von $m_s = m_T$:

- (i) Pendelversuche von Newton bestätigten die Äquivalenz von träger und schwerer Masse mit einer relativen Genauigkeit von 10^{-3}
- (ii) Drehwaage, Cavendish 1798
- (iii) Relative Genauigkeit des Eötvös-Experiments (Budapest 1889) ist 10^{-11} .

Die Äquivalenz zwischen schwerer und träger Masse deutet auf einen engen Zusammenhang zwischen Gravitation und Trägheit hin und ist in gewissem Sinne von "fundamentalerer" Bedeutung als die Newton'sche Bewegungsgleichung und das Newton'sche Gravitationsgesetz: Ersteres fällt nämlich zumindest in der Form $\underline{F} = m\underline{\ddot{x}}$ der Speziellen Relativitätstheorie zum Opfer, während das zweite nur für schwache Gravitationsfelder erfüllt ist (hinreichend kleine Massen oder hinreichend große Entfernungen). Auf der Äquivalenz von träger und schwerer Masse und der Invarianz aller physikalischen Gesetze gegenüber der Lorentz-Transformation basiert dagegen Einstein's Allgemeine Relativitätstheorie.

1.4.9 Massepunktsysteme (MPS)

Ziel: Verallgemeinere die Newton'sche Mechanik auf Systeme aus N Massepunkten mit den Massen m_i und den Ortsvektoren $\underline{r}_i(t)$. Bestimme insbesondere die zeitliche Änderung von Impuls, Drehimpuls und Energie des MPS.

Ausgangspunkt ist die Newton'sche Bewegungsgleichung (NBG) für die einzelnen Massepunkte (MP)

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i(t) = \underline{F}_i = \underbrace{\quad}_{\substack{\text{äußere Kräfte} \\ (\text{äußere Felder,} \\ \text{Schwerkraft, \dots})}} + \sum_{k=1}^N \underline{F}_{ik}^{(ww)}(\underline{r}_i, \underline{r}_k), i = 1, \dots, N \quad (A)$$

Wir haben die Kräfte in äußere und innere Kräfte unterteilt. Die äußeren Kräfte $\underline{F}_i^{(a)}(\underline{r}_i)$ entsprechen äußeren Feldern, in denen sich das MPS befindet, z.B. das Gravitationsfeld oder äußere elektrische und magnetische Felder. $\underline{F}_{ik}^{(ww)}(\underline{r}_i, \underline{r}_k)$ bezeichnet die Inneren oder Wechselwirkungskräfte. Wir nehmen an, dass die Kraft zwischen zwei Massepunkten nur von deren Positionen abhängt und die Wirkungslinie der inneren Kräfte die Verbindungslinie zwischen den beiden MP ist (keine Kräftepaare). Unter Umständen können die Kräfte auch von den Geschwindigkeiten $\dot{\underline{r}}_i, \dot{\underline{r}}_k$ der Massepunkte oder explizit von der Zeit abhängen.

- **Impuls eines Massepunktsystems**

Wir definieren den Impuls und den Ortsvektor des Schwerpunkts des MPS durch

$$\underline{P}(t) := \sum_{i=1}^N m_i \dot{\underline{r}}_i(t) \quad \text{bzw.} \quad \underline{R}(t) := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i(t), \quad M := \sum_{i=1}^N m_i \quad \text{ist die Gesamtmasse des MPS.}$$

Für die Bewegungsgleichung des Schwerpunkts finden wir aus $\sum_{i=1}^N (A)$

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\underline{r}}_i = M \ddot{\underline{R}} = \sum_{i=1}^N \underline{F}_i^{(a)}(\underline{r}_i) + \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^N \underline{F}_{ik}^{(ww)}(\underline{r}_i, \underline{r}_k).$$

Da der letzte Term auf der rechten Seite auf Grund des III. Newton'schen Axioms

$$\sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^N \underline{F}_{ik}^{(ww)} \stackrel{i \leftrightarrow k}{=} \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^N \underline{F}_{ki}^{(ww)} \stackrel{\text{III. NA}}{=} - \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^N \underline{F}_{ik}^{(ww)}$$

verschwindet, ergibt sich

$$\underline{M} \ddot{\underline{R}}(t) = \sum_{k=1}^N \underline{F}_i^{(a)}(\underline{r}_i(t)) \quad \rightarrow \text{Schwerpunktsatz:}$$

Der Schwerpunkt eines Systems aus N MP bewegt sich so, als sei die Gesamtmasse M des MPS in ihm vereinigt und als wirke auf ihn die vektorielle Summe aller äußeren Kräfte.

Mit anderen Worten: Die Wechselwirkung der MP untereinander hat keinen Einfluss auf die Bewegung des Schwerpunkts des MPS.

Ist die Summe der äußeren Kräfte auf ein MPS gleich Null, so folgt

$$\underline{M} \dot{\underline{R}}(t) = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\underline{r}}_i(t) =: \underline{P} = \text{const.}$$

→ der Schwerpunktsimpuls/Gesamtimpuls des MPS \underline{P} ist in diesem Fall eine Erhaltungsgröße / ein Integral der Bewegung.

Schlussfolgerung: Ist die Summe der äußeren Kräfte gleich Null, bewegt der Schwerpunkt sich geradlinig gleichförmig, d.h., ein mit dem Schwerpunkt verbundenes KS ist als Inertialsystem besonders geeignet zur Beschreibung der Bewegung des MPS.

- **Drehimpuls eines Massepunktsystems**

$$\underline{L} = \sum_{i=1}^N \underline{\ell}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\underline{r}_i \times \dot{\underline{r}}_i) \quad \rightarrow \text{Drehimpuls des MPS}$$

$$\frac{d\underline{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i (\underline{r}_i \times \dot{\underline{r}}_i) = \sum_{i=1}^N m_i \underbrace{(\dot{\underline{r}}_i \times \dot{\underline{r}}_i)}_0 + \sum_{i=1}^N m_i (\underline{r}_i \times \ddot{\underline{r}}_i) \stackrel{\text{II.NA}}{=} \sum_{i=1}^N \underline{r}_i \times \underline{F}_i^{(a)} + \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^N \underline{r}_i \times \underline{F}_{ik}^{(ww)}$$

Der letzte Term verschwindet wieder wir wegen des III. Newton'schen Axioms

$$\sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^N \underline{r}_i \times \underline{F}_{ik}^{(ww)} \stackrel{i \leftrightarrow k}{=} \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^N \underline{r}_k \times \underline{F}_{ki}^{(ww)} \stackrel{\text{III.NA}}{=} - \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^N \underline{r}_k \times \underline{F}_{ik}^{(ww)},$$

d.h.

$$\sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^N \underline{r}_i \times \underline{F}_{ik}^{(ww)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^N (\underline{r}_i - \underline{r}_k) \times \underline{F}_{ik}^{(ww)} = 0$$

denn Kräfte, die zwei MP aufeinander ausüben, wirken in Richtung der Verbindungslinie zwischen beiden. Damit ist $\underline{r}_i \times \underline{F}_i^{(a)} =: \underline{M}_i$

$$\underline{\frac{dL}{dt}} = \sum_{i=1}^N \underline{r}_i \times \underline{F}_i^{(a)} =: \underline{M}$$

→ Die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses eines MPS ist gleich dem Gesamtdrehmoment der äußeren Kräfte.

Ist das Gesamtdrehmoment der äußeren Kräfte Null, weil (z.B.) keine äußeren Kräfte wirken, so ist $\underline{L}(\underline{r}_1(t), \underline{r}_N(t), \dots, \dot{\underline{r}}_1(t), \dots, \dot{\underline{r}}_N(t))$ eine Erhaltungsgröße / ein Integral der Bewegung

$$\underline{M} = 0 \leftrightarrow \underline{L} = \text{const.}$$

● Energie eines Massepunktsystems

Aus der NBG (A) erhalten wir

$$\sum_{i=1}^N \dot{\underline{r}}_i \cdot (A) \rightarrow \sum_{i=1}^N \dot{\underline{r}}_i \cdot m_i \ddot{\underline{r}}_i = \sum_{i=1}^N \dot{\underline{r}}_i \cdot \underline{F}_i = \sum_{i=1}^N \dot{\underline{r}}_i \cdot (\underline{F}_i^{(K)} + \underline{F}_i^{(D)}),$$

wobei wir nun auf der rechten Seite zwischen **konservativen** und **dissipativen** Kräften $\underline{F}_i^{(K)}$ bzw. $\underline{F}_i^{(D)}$ unterscheiden wollen.

Die konservativen Kräfte sind als Gradient des Potentials $U(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N)$ darstellbar

$$\underline{F}_i^{(K)} = - \frac{\partial U(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_N)}{\partial \underline{r}_i} = - \underline{\nabla}_i U(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_N).$$

Mit

$$\sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{r}}_i \cdot m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) = \frac{dT}{dt}, \text{ wobei } T := \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 \text{ die } \underline{\text{kinetische Energie des MPS}} \text{ ist}$$

und

$$\sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{F}_i^{(K)} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = - \frac{dU}{dt} \text{ (vorausgesetzt, U nicht explizit zeitabhängig) folgt}$$

$$\underline{\frac{d}{dt} (T + U) = \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{F}_i^{(D)}} .$$

Verschwindet die Leistung der dissipativen Kräfte auf der rechten Seite, folgt

$$T + U = E = \text{const} \rightarrow \text{Energieerhaltung}$$

d.h., die mechanische Energie ist ein Integral der Bewegung

- Potenzial der konservativen Kräfte

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \underbrace{\sum_{i=1}^N U_i(\mathbf{r}_i)}_{\text{äußere Felder}} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^N U_{ik}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k)}_{\text{Wechselwirkungsanteil}}$$

ist die gesamte potenzielle Energie des MPS. Für die äußeren Felder haben wir

$$\mathbf{F}_i^{(a)} = - \frac{\partial U_i(\mathbf{r}_i)}{\partial \mathbf{r}_i} .$$

Für den Wechselwirkungsanteil kann $U_{ik}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k)$ nur von den drei Skalaren r_i^2, r_k^2 und $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)^2$ abhängen. Alle anderen Skalare wie $\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_k$ und $(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_k)^2$ sind Linearkombinationen dieser drei. Nun ist aber das III. Newton'sche Axiom nur dann erfüllt, wenn

$$\mathbf{F}_{ik}^{(ww)}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k) := - \frac{\partial U_{ik}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|)}{\partial \mathbf{r}_i} = - \frac{\partial U_{ik}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|)}{\partial \mathbf{r}_k} = - \mathbf{F}_{ki}^{(ww)}(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) \quad i, k = 1, \dots, N .$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ oben berücksichtigt, dass jedes Indexpaar nur einmal auftreten darf, der Beitrag U_{ik} bestimmt sowohl $\mathbf{F}_{ik}^{(ww)}$ als auch $\mathbf{F}_{ki}^{(ww)}$.

- Beispiel: Für ein MPS aus N elektrisch geladenen Teilchen ($\underline{r}_i, m_i, q_i$) im Schwerfeld der Erde (nahe der Erdoberfläche, $\underline{g} = -g \underline{e}_z$) erhalten wir

$$U(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_N) = \sum_{i=1}^N m_i g z_i + \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \sum_{i \neq k=1}^N \frac{q_i q_k}{|\underline{r}_i - \underline{r}_k|}$$

Bemerkungen

- (i) Ist U explizit zeitabhängig, so gilt

$$\underline{F} \cdot \dot{\underline{r}} = -\frac{\partial U}{\partial x} \dot{x} - \frac{\partial U}{\partial y} \dot{y} - \frac{\partial U}{\partial z} \dot{z} = -\underline{\nabla} U \cdot \dot{\underline{r}} \neq -\frac{dU}{dt} \quad \text{denn dann ist} \quad \frac{dU}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial t} - \underline{\nabla} U \cdot \dot{\underline{r}}$$

Die allgemeine Form einer konservativen Kraft lautet

$$\underline{F} = -\text{grad } U(\underline{r}) + \dot{\underline{r}} \times \underline{A}(\underline{r}, t) \quad \text{wobei } U \text{ nicht explizit } t \text{ abhängig und } A \text{ beliebig.}$$

- Beispiel: $\underline{F}_L = q \dot{\underline{r}} \times \underline{B}$ \rightarrow Lorentz-Kraft (verrichtet keine Arbeit)

1.4.10 Newton'sche Bewegungsgleichung für ein MPS in verallgemeinerten Koordinaten

Zwei Fragen stellen sich:

- (i) Wie sieht die NBG eigentlich in verallgemeinerten also in nichtkartesischen, krummlinigen Koordinaten aus?
- (ii) Bisher haben wir immer angenommen, die resultierende wirkende Kraft sei vor der Lösung der BWG bekannt. Liegen allerdings Bewegungsbeschränkungen vor, d.h., wenn Zwangskräfte wirken, ist diese Voraussetzung u.U. nicht einfach zu erfüllen.

■ **Einschub:** Ebenes mathematisches Pendel

Ein MP der Masse m hängt an einem Faden/einer gewichtslosen Stange der Länge ℓ . Die Bewegung des MP ist durch die Fadenspannkraft (Zwangskraft) auf eine Kreisbahn eingeschränkt. Anstelle der kartesischen Koordinaten x und y zur Festlegung der Lage des MP verwenden wir den Auslenkwinkel φ :

$$x(t) = \ell \sin \varphi(t), y(t) = \ell \cos \varphi(t). \quad (\text{Koordinatenursprung im Aufhängepunkt, } \underline{g} = -g \underline{e}_y)$$

Durch die Wahl von φ ist die Position des MP eindeutig bestimmt und gleichzeitig die zur Zwangskraft gehörende Bewegungsbeschränkung $x(t)^2 + y(t)^2 = \ell^2$ zu jedem Zeitpunkt t identisch erfüllt.

$$\text{Die potenzielle Energie des MP ist } U(\varphi) = mgh(\varphi) = mg\ell(1 - \cos\varphi) \stackrel{\varphi \ll 1}{\approx} mg\ell \frac{\varphi^2}{2}.$$

Obwohl die "Koordinate" φ die Lage des Massepunkts eindeutig bestimmt, lautet die NBG für die "Bahnkurve" $\varphi(t)$ offensichtlich **nicht**

$$m\ddot{\varphi} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -mg\ell \sin \varphi \quad \text{also} \quad m\ddot{\varphi} + g\ell \sin \varphi = 0 !$$

Drei Möglichkeiten zur korrekten Ableitung der Pendelgleichung:

(i) Aus dem Energieerhaltungssatz $\frac{m}{2} (\ell^2 \dot{\varphi}^2) + mg\ell(1 - \cos\varphi) = E = mg\ell(1 - \cos\varphi_0)$

(φ_0 - maximale Auslenkung des Pendels) folgt

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{\ell} (\cos\varphi - \cos\varphi_0) \quad \text{also} \quad 2\dot{\varphi} \ddot{\varphi} = -\frac{2g}{\ell} \sin \varphi \dot{\varphi} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \sin \varphi = 0}}$$

(ii) Polarkoordinaten verwenden:

$$\underline{r} = r \underline{e}_r = \ell \underline{e}_r, \quad \underline{\dot{r}} = \dot{\ell} \underline{e}_r = \ell \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi, \quad \underline{\ddot{r}} = \ell \ddot{\varphi} \underline{e}_\varphi - \ell \dot{\varphi}^2 \underline{e}_r, \quad \underline{\nabla} = \underline{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \underline{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\text{NBG: } m \underline{\ddot{r}} = -\underline{\nabla} U \rightarrow m (-\ell \dot{\varphi}^2 \underline{e}_r + \ell \ddot{\varphi} \underline{e}_\varphi) = \underline{e}_\varphi \frac{1}{\ell} \frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

Kraftkomponenten in tangentialer Richtung (φ - Richtung) ergeben:

$$m \ell \ddot{\varphi} = -\frac{1}{\ell} m g \ell \sin \varphi, \quad \text{also wieder} \quad \underline{\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \sin \varphi = 0} .$$

Bemerkung: Das ist die Zerlegung der Gewichtskraft $-mg$ in eine Komponente in Richtung des gespannten Fadens ($\underline{F}_N = F_N \underline{e}_r$) und eine dazu senkrechte "rücktreibende" Kraft ($\underline{F}_R = F_R \underline{e}_\varphi$). \underline{F}_N steht senkrecht auf der Bahnkurve (Kreis) und wird durch die Fadenspannkraft kompensiert. \underline{F}_R ist tangential zur Bahnkurve gerichtet und "treibt die Bewegung des Pendels an" (Skizze).

(iii) Aus der Grundgleichung der Drehbewegung

Drehmoment der Schwerkraft und Drehimpuls bzgl. des Aufhängepunkts lauten

$$\begin{aligned} \underline{M} = \underline{r} \times \underline{F} &= \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ \ell \sin \varphi & -\ell \cos \varphi & 0 \\ -mg \sin \varphi \cos \varphi & -mg \sin^2 \varphi & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \underline{e}_z (\ell \sin \varphi (-mg \sin^2 \varphi) - (-\ell \cos \varphi) (-mg \sin \varphi \cos \varphi)) = \\ &= \ell mg (-\sin^3 \varphi - \sin^2 \varphi \cos \varphi) = -\ell mg \sin \varphi \underline{e}_z \end{aligned}$$

bzw.

$$\underline{L} = m(\underline{r} \times \underline{\dot{r}}) = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ \ell \sin \varphi & -\ell \cos \varphi & 0 \\ \ell \dot{\varphi} \cos \varphi & -\ell \dot{\varphi} (-\sin \varphi) & 0 \end{vmatrix} = m \underline{e}_z (\ell^2 \dot{\varphi} \sin^2 \varphi + \ell^2 \dot{\varphi} \cos^2 \varphi) = m \ell^2 \dot{\varphi} \underline{e}_z$$

Aus der NBG der Drehbewegung $\frac{d\underline{L}}{dt} = \underline{M}$ folgt dann $m \ell^2 \frac{d}{dt} \dot{\varphi} = -mg \ell \sin \varphi$

$$\text{also wieder} \quad \underline{\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \sin \varphi = 0} .$$

Zurück zu **1.4.10**

Behauptung: Das System der Newton'schen Bewegungsgleichungen für ein Massepunktsystem aus N Massepunkten mit der Einfachheit halber gleichen Massen

$$m \ddot{\underline{r}} = \underline{F}, \quad \underline{r} = \{r_1, r_2, \dots, r_{3N}\}$$

ist äquivalent zu den Gleichungen

$$\underline{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, f}$$

wobei $\underline{L}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) = T(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) - U(\underline{q}, t) \rightarrow$ **Lagrange-Funktion** des MPS.

$\underline{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_f\}$ sind **verallgemeinerte Koordinaten** und f ist die Anzahl der Freiheitsgrade des mechanischen Systems, d.h., die minimale Anzahl unabhängiger Größen zur eindeutigen Bestimmung der Position aller MP/Teilchen.

■ Beispiel: Ebenes mathematisches Pendel (s.o.): Zwei kartesische Koordinaten $x = \ell \sin \varphi, y = \ell \cos \varphi$; eine Zwangbedingung $x^2 + y^2 = \ell^2$; also eine unabhängige verallgemeinerte Koordinate, φ .

■ Beispiel: Unterliegen N Massepunkte R Zwangbedingungen, ergibt sich die Zahl der Freiheitsgrade zu $f = 3N - R$.

Zum Beweis führen wir die Koordinatentransformation $\underline{r} = \underline{r}(\underline{q})$ explizit aus.

Für die Geschwindigkeit erhalten wir

$$\dot{\underline{r}} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^f \underline{e}_i \cdot \dot{q}_i, \quad \underline{e}_i := \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_i} = \underline{e}_i(\underline{q}) \quad (\text{H1})$$

Die Größen $\dot{\underline{q}} = \{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f\}$ nennen wir **verallgemeinerte Geschwindigkeiten**.

Nochmalige Ableitung von (H1) nach der Zeit ergibt die Beschleunigung, eingesetzt in die NBG folgt

$$m \underline{\ddot{r}} = m \sum_{i=1}^f \left(\sum_{j=1}^f \frac{\partial \underline{e}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \dot{q}_i + \underline{e}_i \ddot{q}_i \right) = \underline{F} \cdot \underline{e}_k$$

bzw.

$$\underline{F} \cdot \underline{e}_k = m \sum_{i,j=1}^f \frac{\partial \underline{e}_i}{\partial q_j} \cdot \underline{e}_k \dot{q}_i \dot{q}_j + m \sum_{i=1}^f \underline{e}_i \cdot \underline{e}_k \ddot{q}_i \quad (\text{H2})$$

Wir wollen versuchen, die \underline{e}_i zu eliminieren und vollständig zu skalaren Größen überzugehen. Für die kinetische Energie erhalten wir

$$T = \frac{m}{2} \underline{\dot{r}}^2 \stackrel{(H1)}{=} \frac{m}{2} \sum_{i,j=1}^f \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j \dot{q}_i \dot{q}_j =: \tilde{T}(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$$

und nacheinander abgeleitet nach \dot{q}_k und der Zeit

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^f \underline{e}_i \cdot \underline{e}_k \dot{q}_i + \frac{m}{2} \sum_{j=1}^f \underline{e}_k \cdot \underline{e}_j \dot{q}_j = m \sum_{i=1}^f \underline{e}_i \cdot \underline{e}_k \dot{q}_i$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_k} \right) &= m \sum_{i=1}^f \left(\sum_{j=1}^f \frac{\partial \underline{e}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \cdot \underline{e}_k \dot{q}_i + \sum_{j=1}^f \underline{e}_i \cdot \frac{\partial \underline{e}_k}{\partial q_j} \dot{q}_j \dot{q}_i + \underline{e}_i \cdot \underline{e}_k \ddot{q}_i \right) = \\ &= m \underbrace{\sum_{i,j=1}^f \frac{\partial \underline{e}_i}{\partial q_j} \cdot \underline{e}_k \dot{q}_j \dot{q}_i + m \sum_{i=1}^f \underline{e}_i \cdot \underline{e}_k \ddot{q}_i}_{\text{vergleiche rechte Seite von (H2)}} + m \underbrace{\sum_{i,j=1}^f \underline{e}_i \cdot \frac{\partial \underline{e}_k}{\partial q_j} \dot{q}_j \dot{q}_i}_{\text{ersetze durch } \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_k}} \end{aligned} \quad (\text{H3})$$

Die Ersetzung im letzten Term rechts ist möglich, weil

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_k} = \frac{m}{2} \sum_{i,j=1}^f \frac{\partial \underline{e}_i}{\partial q_k} \cdot \underline{e}_j \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{m}{2} \sum_{i,j=1}^f (i \leftrightarrow j) = m \sum_{i,j=1}^f \frac{\partial \underline{e}_i}{\partial q_k} \cdot \underline{e}_j \dot{q}_i \dot{q}_j \stackrel{i \leftrightarrow j}{=} \quad (\text{H4})$$

$$m \sum_{i,j=1}^f \frac{\partial \underline{e}_j}{\partial q_k} \cdot \underline{e}_i \dot{q}_i \dot{q}_j = m \sum_{i,j=1}^f \underline{e}_i \cdot \frac{\partial \underline{e}_k}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

denn $\frac{\partial \underline{e}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_j} = \frac{\partial \underline{e}_j}{\partial q_k}$ solange die Koordinatentransformation $\underline{r} = \underline{r}(\underline{q})$

stetig differenzierbar ist.

$$(H3) \text{ und } (H4) \text{ ergibt eingesetzt in } (H2) \quad \underline{F} \cdot \underline{e}_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_k} \right) \quad (H5)$$

Wir nehmen nun an, \underline{F} sei konservativ, $\underline{F} = -\text{grad } U(\underline{r}, t) = -\frac{\partial U(\underline{r}, t)}{\partial \underline{r}}$.

Nach der Transformation $\underline{r} = \underline{r}(\underline{q})$ erhalten wir die neue Funktion $\tilde{U}(\underline{q}, t)$ und die linke Seite

von H(5) lautet $\underline{F} \cdot \underline{e}_k = -\frac{\partial U}{\partial \underline{r}} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_k} = -\sum_{i=1}^f \frac{\partial U}{\partial r_i} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial U}{\partial q_k}$. Damit hat (H5) die Form

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial (\tilde{T} - \tilde{U})}{\partial q_k} = 0.$$

Wenn wir nun noch annehmen, dass U nicht von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten \dot{q} abhängt, folgt

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (H) \quad \text{mit} \quad \underline{L}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) = \underline{T}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) - U(\underline{q}, t) \quad (k = 1, \dots, f).$$

und die Behauptung ist bewiesen.

L ist die nichtrelativistische **Lagrange-Funktion** des betrachteten physikalischen Systems (hier eines MPS aus N wechselwirkenden MP/Teilchen). Sie ergibt sich als Differenz aus kinetischer und potenzieller Energie, ausgedrückt als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und Geschwindigkeiten $\underline{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_f\}$ bzw. $\dot{\underline{q}} = \{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f\}$.

(H) sind die Lagrange'schen BWG II. Art. Es handelt sich um ein System aus f gekoppelten ODE 2. Ordnung für die Bahnkurven $\underline{q}(t)$ in verallgemeinerten Koordinaten.

Man überzeugt sich leicht, dass sich für das mathematische Pendel mit

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} (\ell^2 \dot{\varphi}^2) - mg \ell (1 - \cos \varphi)$$

aus (H) die korrekte Bewegungsgleichung $m \ell^2 \ddot{\varphi} + mg \ell \sin \varphi = 0$ ergibt.