

2. Formulierung der Klassischen Mechanik nach Lagrange und Euler

2.0 Historie

Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759) sprach 1746 als erster von einem allgemeingültigen Prinzip der Naturprozesse, extremal oder optimal abzulaufen. Auf Leonhard Euler (1707-1783) und Jean Louis Lagrange (1736-1813) geht die mathematisch präzise Fassung eines solchen Prinzips zurück (Euler-Lagrange-Gleichungen). Die Lagrange'sche Formulierung der Mechanik stammt aus dem Jahr 1788. 1834 formulierte William Hamilton das nach ihm benannte Variationsprinzip.

2.1 Ableitung der Newton'schen Bewegungsgleichung aus einem Variationsprinzip

Betrachte einen Körper/MP (Masse m), der sich im Potenzial $U(\underline{r})$ bewegt, dessen Lagrange-Funktion also

$$L(\underline{r}, \dot{\underline{r}}) = \frac{m}{2} \dot{\underline{r}}^2 - U(\underline{r})$$

lautet. Wir führen die **Wirkung** S

Def.: $S[\underline{r}(t)] := \int_{t_1}^{t_2} dt L(\underline{r}(t), \dot{\underline{r}}(t), t)$ **Wirkungsfunktional** entlang $\underline{r}(t)$ zwischen $\underline{r}(t_1)$ und $\underline{r}(t_2)$

entlang einer Bahnkurve/Trajektorie $\underline{r}(t)$ zwischen einem Anfangspunkt und einem Endpunkt $\underline{r}(t_1)$ bzw. $\underline{r}(t_2)$ als neue, fundamentale Größe ein.

Die Wirkung hat die Dimension Energie x Zeit. Jeder Trajektorie $\underline{r}(t)$ zwischen den Positionen $\underline{r}(t_1)$ bzw. $\underline{r}(t_2)$ wird eine Wirkung (Zahl) $S[\underline{r}(t)]$ zugeordnet.

Wir betrachten nun eine herausgegriffene Trajektorie $\underline{r}(t)$ und eine benachbarte Trajektorie

$$\tilde{\underline{r}}(t) = \underline{r}(t) + \delta\underline{r}(t), \quad \delta\underline{r}(t_1) = \delta\underline{r}(t_2) = 0,$$

wobei die kleine Abweichung/Variation $\delta\underline{r}(t)$ im Anfangs- und Endpunkt der Bewegung $\underline{r}(t)$ verschwinden möge. Beim Übergang von $\underline{r}(t)$ zu $\tilde{\underline{r}}(t) = \underline{r}(t) + \delta\underline{r}(t)$ variiert die Wirkung um

$$\delta S := S[\tilde{\underline{r}}(t)] - S[\underline{r}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m}{2} (\dot{\underline{r}} + \delta\dot{\underline{r}})^2 - U(\underline{r} + \delta\underline{r}) \right] - \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m}{2} \dot{\underline{r}}^2 - U(\underline{r}) \right].$$

Für kleine Variationen $\delta\underline{r}(t)$ finden wir in linearer Näherung (Taylor-Reihe) für die Variation der Wirkung δS

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(m \dot{\underline{r}} \cdot \delta\dot{\underline{r}} - \left. \frac{\partial U}{\partial \underline{r}} \right|_{\underline{r}(t)} \cdot \delta\underline{r} \right) + O((\delta\underline{r})^2, (\delta\dot{\underline{r}})^2) = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[m \frac{d}{dt} (\dot{\underline{r}} \cdot \delta\underline{r}) - m \ddot{\underline{r}} \cdot \delta\dot{\underline{r}} - \left. \frac{\partial U}{\partial \underline{r}} \right|_{\underline{r}(t)} \cdot \delta\underline{r} \right] + O((\delta\underline{r})^2, (\delta\dot{\underline{r}})^2) = \\ &= \underbrace{m (\dot{\underline{r}} \cdot \delta\underline{r}) \Big|_{t_1}^{t_2}}_{0, \text{ da } \delta\underline{r}(t_1) = \delta\underline{r}(t_2) = 0} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(-m \ddot{\underline{r}} - \left. \frac{\partial U}{\partial \underline{r}} \right|_{\underline{r}(t)} \right) \cdot \delta\underline{r} + O((\delta\underline{r})^2, (\delta\dot{\underline{r}})^2). \end{aligned}$$

Wir erkennen, dass δS für beliebige, kleine $\delta\underline{r}(t)$ von $\underline{r}(t)$ nur dann verschwindet, wenn die ungestörte Trajektorie $\underline{r}(t)$ der Newton'schen Bewegungsgleichung genügt:

$$\underline{\delta S[\underline{r}(t)] = 0} \quad \text{für} \quad \underline{m \ddot{\underline{r}}(t) = - \left. \frac{\partial U}{\partial \underline{r}} \right|_{\underline{r}(t)} = F(\underline{r}(t))} \quad (\delta\underline{r}(t_1) = \delta\underline{r}(t_2) = 0)$$

(i) Die NBG ist äquivalent zur Forderung $\underline{\delta S[\underline{r}(t)] := \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(\underline{r}(t), \dot{\underline{r}}(t), t) = 0}$

Statt der Gültigkeit des II. Newton'schen Axioms können wir die Extremalität der Wirkung entlang der Bahnkurve postulieren. Das führt auf eine vollkommen neue, alternative

Formulierung der Mechanik, deren Verallgemeinerungen sich bis in die Feldtheorie hinein erstrecken (s.u.).

(ii) Unter allen denkbaren Trajektorien zwischen zwei Orten mit den Radiusvektoren $\underline{r}(t_1)$ und $\underline{r}(t_2)$ besitzt die in der Natur tatsächlich realisierte Bahnkurve/Trajektorie die extremale (meist minimale) Wirkung.

2.2 Einschub Variationsrechnung

1696 formulierte Jacob Bernoulli das Brachystochronenproblem, das als Geburtsstunde der Variationsrechnung gilt:

Entlang welcher Kurve $y(x)$ gelangt ein reibungsfrei im Schwerfeld gleitender Körper in kürzester Zeit T von $P_1(x_1, y_1)$ nach $P_2(x_2, y_2)$?

$$\text{Zeit: } T = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v}, \quad \text{Wegelement/Bogenlänge: } ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\text{Energieerhaltung: } \frac{m}{2} v^2 = mg(y_1 - y), \quad \text{also } v^2 = 2g(y_1 - y).$$

$$\text{Insgesamt ergibt sich } T[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{\frac{1 + y'^2(x)}{2g[y_1 - y(x)]}}.$$

Damit die Zeit entlang der Kurve $y(x)$ minimal wird, muss $T[y(x) + \delta y(x)] > T[y(x)]$ für beliebige, hinreichend kleine $\delta y(x)$ gelten.

Beachte folgende Gegenüberstellung

Funktion $y(x)$	Funktional $F[y(x)]$
- Zuordnung zwischen Zahlenwerten	- einer Funktion $y(x)$ wird ein Zahlenwert zugeordnet
- Minimum bei $x = x_0$, wenn $y(x_0 + \delta x) > y(x_0)$ für beliebige hinreichend kleine δx	- Minimum bei $y = y_0(x)$, wenn $F[y(x) + \delta y(x)] > F[y(x)]$ für beliebige hinreichend kleine $\delta y(x)$
- notwendige Bedingung $\left. \frac{dy}{dx} \right _{x_0} = 0$	- notwendige Bedingung \rightarrow sicher eine DG für $y(x)$.
	Welche?

Wir betrachten Funktionale der Form

$$F[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} dx f(y, y', x), \quad y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2, \quad y' := \frac{dy}{dx}.$$

$F[y]$ hat ein Extremum bei $y(x)$, wenn $\delta F := F[y + \delta y] - F[y] = 0$, also wenn die Variation des Funktionals verschwindet (notwendige Bedingung). Wir setzen

$$\delta y = \delta y(x) = \varepsilon \eta(x), \quad \varepsilon \text{ infinitesimal klein, } \eta(x) \text{ differenzierbar mit } \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$$

und fassen das Funktional als Funktion des Parameters ε auf

$$F[y(x) + \delta y(x)] = F[y(x) + \varepsilon \eta(x)] = F(\varepsilon).$$

Das führt die notwendige Bedingung für die Extremalität des Funktionals $F[y(x)]$ auf die Bedingung für das Extremum einer Funktion $F(\varepsilon)$ zurück (ersetzt die Berechnung der Funktionalableitung $\delta F / \delta y$ durch die Differentiation der Funktion $F(\varepsilon)$ nach ε)

Die notwendige Bedingung für ein lokales Extremum von $F(\varepsilon)$ lautet

$$\left. \frac{dF(y + \varepsilon \eta)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Aus

$$dF(y + \varepsilon \eta) = \int_{x_1}^{x_2} dx f(y + \varepsilon \eta, y' + \varepsilon \frac{d\eta}{dx}, x) + \frac{\partial f}{\partial y} \varepsilon \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \varepsilon \frac{d\eta}{dx} + \dots$$

folgt

$$\left. \frac{dF(y + \varepsilon \eta)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx}}_{\text{partiell integrieren}} \right) = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \underbrace{\eta(x) \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x_1}^{x_2}}_{\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0} - \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) = 0$$

$$\text{Also ist } \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) = 0 \quad \text{für beliebige hinreichend kleine } \eta(x).$$

Damit muss $y(x)$ der Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\partial f(y, y', x)}{\partial y'} \right] - \frac{\partial f(y, y', x)}{\partial y} = 0 \rightarrow \text{Euler-Lagrange-Gleichung der Variationsrechnung}$$

genügen.

Verallgemeinert auf ein Funktional von n Funktionen $\underline{y} = (y_1(x), y_1(x), \dots, y_n(x))$ einer unabhängigen Variablen x mit festen Randwerten $y_i(x_1) = y_{i1}, y_i(x_2) = y_{i2}, i = 1, 2, \dots, n$ folgt auf analoge Weise über die Betrachtung der Funktion $F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ zum Funktional $F[y_1 + \varepsilon_1 \eta_1, \dots, y_n + \varepsilon_n \eta_n]$ als notwendige Bedingung für $\delta F = 0$, dass die Funktionen $y_i(x)$ Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\partial f(\underline{y}, \underline{y}', x)}{\partial y_i'} \right] - \frac{\partial f(\underline{y}, \underline{y}', x)}{\partial y_i} = 0, i = 1, 2, \dots, n$$

sein müssen.

17.11.10

2.3 Lagrange-Gleichungen II. Art

Über die Entsprechungen

$$x \leftrightarrow t, \underline{y}(x) \leftrightarrow \underline{q}(t), f(\underline{y}, \underline{y}', x) \leftrightarrow L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t), F[\underline{y}] = \int_{x_1}^{x_2} dx f(\underline{y}, \underline{y}', x) \leftrightarrow S[\underline{q}] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$$

erkennt man aus Kapitel 2.2, dass die Bahnkurven $\underline{q}(t)$ in verallgemeinerten Koordinaten Lösungen der gekoppelten Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, i = 1, 2, \dots, f$$

sind, die das Wirkungsfunktional $S[\underline{q}] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$ extremalisieren, und aus der Forderung

$$\delta S[\underline{q}(t)] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = 0 \text{ folgen.}$$

Davon können wir uns noch einmal direkt überzeugen. Wir betrachten ein physikalisches System, dessen Zustand durch f verallgemeinerte Koordinaten $\underline{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_f(t))$ und f verallgemeinerte Geschwindigkeiten $\underline{\dot{q}}(t) = (\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_f(t))$ beschrieben wird. Seine Lagrange-Funktion sei $L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = T(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) - U(\underline{q}, t)$. Für die Variation der Wirkung infolge einer Variation $\delta \underline{q}(t)$ der Trajektorie $\underline{q}(t)$ mit $\delta \underline{q}(t_1) = \delta \underline{q}(t_2) = 0$ ergibt sich

$$\delta S[q(t)] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) + \dots =$$

$$\sum_{i=1}^f \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right] + \dots = \sum_{i=1}^f \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i + \dots$$

Null, da nach Integration
 $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$

Postulieren wir

$$\delta S[q(t)] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Hamilton'sches Variationsprinzip (1834),}$$

("Prinzip der kleinsten Wirkung")

dann genügt die betrachtete Trajektorie $\underline{q}(t)$ den Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, i = 1, 2, \dots, f \quad \rightarrow \quad \text{Lagrange-Gleichungen II. Art}$$

Alle $\delta q_i(t)$ müssen voneinander unabhängig, also nicht durch Nebenbedingungen eingeschränkt sind. Bewegungseinschränkungen werden durch geeignete Wahl der verallgemeinerten Koordinaten $\underline{q}(t)$ eliminiert, denn diese erfüllen laut Definition identisch eventuell vorhandene Zwangbedingungen (vgl. unten, Lagrange I). Die $2f$ Randbedingungen $q_i(t_1), q_i(t_2)$ sind äquivalent zu $2f$ Anfangsbedingungen $q_i(t_1), \dot{q}_i(t_1)$.

Fazit: Damit haben wir die Lagrange-Gleichungen nicht nur durch Übergang zu krummlinigen Koordinaten aus der Newton'schen Bewegungsgleichung, sondern als Folge eines neuen Postulats zur Bestimmung der Bahnkurven, des Hamilton'schen Variationsprinzips, abgeleitet.

Angenommen, zwei Lagrange-Funktionen L und L' unterscheiden sich lediglich durch die totale zeitliche Ableitung einer Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und der Zeit

$$L'(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) = L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) + \frac{d}{dt} F(\underline{q}, t) .$$

Dann ist

$$S'[\underline{q}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt L'(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} F(\underline{q}, t) = S[\underline{q}(t)] + F(\underline{q}_2, t_2) - F(\underline{q}_1, t_1) .$$

Der Zusatzterm $F(\underline{q}_2, t_2) - F(\underline{q}_1, t_1)$ verschwindet bei Variation mit $\delta \underline{q}(t_1) = \delta \underline{q}(t_2) = 0$, d.h., aus $\delta S[\underline{q}(t)] = 0$ folgt $\delta S'[\underline{q}(t)] = 0$ und umgekehrt. Die auf L und L' basierenden Bewegungsgleichungen sind damit äquivalent, d.h., die Lagrange-Gleichungen sind invariant gegenüber Transformationen $L \rightarrow L' = L + \frac{d}{dt} F(\underline{q}, t)$ mit beliebigen nicht von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten abhängenden Funktionen F . Diese Invarianz lässt sich bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen ausnutzen, darüber hinaus wird sich später erweisen, dass sie von fundamentaler Bedeutung ist (\rightarrow Eichtransformationen).

Oft ist die Lagrange-Funktion die einfachste, mit den Symmetrien des physikalischen Systems verträgliche Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und Geschwindigkeiten.

■ Beispiel: Freies Teilchen: drei Freiheitsgrade $x, y, z \rightarrow L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$

Wegen der Homogenität der Zeit entfällt t , wegen der Homogenität des Raumes entfallen x, y, z . Unter Berücksichtigung der Isotropie des Raumes folgt $L(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$. Am einfachsten ist $L = a(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$. Die Konstante $a = m/2$ hat keinen Einfluss auf die

Bewegungsgleichung: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} = 0, \dot{y} = 0, \dot{z} = 0$ für die geradlinig gleichförmige

Bewegung.

2.4 Integrale der Bewegung in der Lagrange-Mechanik

Die verallgemeinerte Koordinate q_k heisst zyklisch, wenn die Lagrange-Funktion L nicht von q_k abhängt:

$$q_k \text{ zyklisch, wenn } \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0.$$

Wir nennen

$$\underline{p}_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

den zu einer zyklischen Koordinate q_k kanonisch konjugierten Impuls.

Dann haben wir folgenden Satz: Ist q_k zyklisch, dann ist p_k Integral der Bewegung.

$$\text{Beweis: Aus } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \text{ folgt bei } \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \text{ sofort } \frac{d}{dt} p_k = 0, \text{ also } p_k = \text{const}$$

→ Jede zyklische Koordinate impliziert eine Erhaltungsgröße.

■ Beispiel: Freies Teilchen ($U = 0$)

$$L = \frac{m}{2} \dot{\underline{r}}^2 \text{ unabhängig von } \underline{r}, \text{ also ist } \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}} = m \dot{\underline{r}} = \underline{p} = \text{const} \rightarrow \text{Impulserhaltung.}$$

■ Beispiel: Bewegung der Punktmasse m im Zentralfeld $U(r)$

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) - U(r), \text{ Kugelkoordinaten.}$$

Die Koordinate φ ist zyklisch (auch von der Zeit t hängt die Lagrange-Funktion nicht explizit ab, s.u.). Aus

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \text{ folgt } p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} = \text{const.}$$

Für die z-Komponente des Drehimpulses \underline{L} findet man leicht

$$L_z = m(\underline{r} \times \dot{\underline{r}})_z = m(xy\dot{z} - yz\dot{x}) = \dots = mr^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}, \text{ also Drehimpulserhaltung}$$

- **Sonderfall Energieerhaltung**

Für $L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$ bestimmen wir die vollständige Ableitung des Ausdrucks $\sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L$ nach der Zeit:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \right) = \sum_{k=1}^f \left[\underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right)}_{\frac{\partial L}{\partial q_k}} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right] - \frac{\partial L}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Also: Wenn L nicht explizit zeitabhängig, dann ist $\sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L$ ein Integral der Bewegung.

Wir werden nun zeigen, dass $\sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L$ die mechanische Energie darstellt. Aus

$$\frac{dx_n}{dt} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (\text{der Einfachheit halber sei die Transformation } x_n = x_n(\underline{q}) \text{ t-unabhängig})$$

folgt für die kinetische Energie

$$T(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n}{2} \dot{x}_n^2 = \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n}{2} \sum_{i,j=1}^f \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \frac{\partial x_n}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j.$$

Wenn die potentielle Energie nicht von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten abhängt, ist wegen $L = T - U$

$$\sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \sum_{k=1}^f \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n}{2} \sum_{k,j=1}^f \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \frac{\partial x_n}{\partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_j + \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n}{2} \sum_{k,i=1}^f \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_k = 2T.$$

Das ergibt
$$\sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = 2T - T + U = T + U.$$

Fazit: Wenn die Lagrangefunktion nicht explizit von der Zeit t abhängt, dann bleibt die mechanische Energie im Verlauf der Bewegung konstant

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \rightarrow \underline{T(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) + U(\underline{q}) =: E = \text{const}} \quad \left(\frac{\partial x_n}{\partial t} = 0, \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} = 0, k = 1, 2, \dots, f \right)$$