2.5 "Rezept" zur Lösung von Bewegungsproblemen mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen II. Art. Beispiele

1. Wähle geeignete, d.h., eventuell vorhandene Zwangbedingungen exakt befriedigende und die Symmetrie des Problems berücksichtigende, verallgemeinerte Koordinaten $\underline{q} = (q_1, \ldots, q_f)$ und drücke die kartesischen Koordinaten $\underline{r} = (x_1, \ldots, x_{3N})$ entsprechend

$$x_n = x_n(\underline{q}, t)$$

durch $\underline{q}$ aus.

Dabei ist f die Anzahl der Freiheitsgrade des betrachteten Systems. Für ein Massepunktsystem aus N Teilchen mit R Zwangsbedingungen ist z.B. $f = 3N - R$.

2. Stelle kinetische und potenzielle Energie des mechanischen Systems als Funktionen von $\underline{q}$ und $\underline{\dot{q}}$ dar und bestimme seine Lagrange-Funktion

$$L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = T(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) - U(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t).$$

Enthält $L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$ zyklische Koordinaten? Wenn ja, bestimme die zugehörigen Integrale der Bewegung.

Enthält $L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$ Terme der Form $\frac{d}{dt} F(\underline{q}, t)$ mit beliebigem F? Wenn ja, weglassen, da ohne Einfluss auf die Euler-Lagrange-Gleichungen.

3. Leite die Euler-Lagrange-Gleichungen für $q_i(t)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, f$$

ab.

4. Löse die Euler-Lagrange-Gleichungen unter Berücksichtigung existierender Integrale der Bewegung, bestimme die Integrationskonstanten aus den Anfangsbedingungen und diskutiere die Lösung.

■ **Beispiel**: Nichtrelativistische Bewegung eines geladenen Teilchens (Masse m, Ladung q) im elektromagnetischen Feld

1. Wir verwenden kartesische Koordinaten $\underline{r}(t)$, da weder Bewegungsbeschränkungen noch Symmetrien vorgegeben sind.

2. Behauptung: Die Lagrange-Funktion lautet

$$L(\underline{r},\dot{\underline{r}},t) = \frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 - q\,\phi(\underline{r},t) + q\,\dot{\underline{r}}\cdot\underline{A}(\underline{r},t) \qquad \text{(H)}$$

==

Einschub: Definition des skalaren Potentials $\phi(\underline{r},t)$ und des Vektorpotentials $\underline{A}(\underline{r},t)$ des elektromagnetischen Feldes.

Ausgangspunkt: Maxwell´sche Gleichungen für die elektrische Feldstärke $\underline{E}(\underline{r},t)$ und die magnetische Induktion $\underline{B}(\underline{r},t)$:

$$\operatorname{div}\underline{B}(\underline{r},t) = 0 \qquad \operatorname{div}\underline{D}(\underline{r},t) = \rho(\underline{r},t) \qquad \underline{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\underline{E}$$

$$\operatorname{rot}\underline{E}(\underline{r},t) = -\frac{\partial\underline{B}(\underline{r},t)}{\partial t} \qquad \operatorname{rot}\underline{H}(\underline{r},t) = \underline{j}(\underline{r},t) + \frac{\partial\underline{D}(\underline{r},t)}{\partial t} \qquad \underline{B} = \mu_0\mu_r\underline{H}$$

Die beiden linken Gleichungen enthalten weder die Ladungsdichte (Quelle des elektrischen Feldes), noch die Stromdichte (Quelle des magnetischen Feldes). Die erste bringt zum Ausdruck, dass es keine magnetischen Ladungen gibt. Sie kann durch den Ansatz

$$\operatorname{rot}\underline{A}(\underline{r},t) = \underline{B}(\underline{r},t)$$

erfüllt werden. Dieser Ansatz definiert das Vektorpotenzial $\underline{A}(\underline{r},t)$ des elektromagnetischen Feldes.
Aus der zweiten Gleichung, dem Faraday´schen Induktionsgesetz, folgt dann

$$0 = \operatorname{rot}\underline{E}(\underline{r},t) + \frac{\partial\underline{B}(\underline{r},t)}{\partial t} = \operatorname{rot}\left(\underline{E}(\underline{r},t) + \frac{\partial\underline{A}(\underline{r},t)}{\partial t}\right).$$

Da sich ein wirbelfreies Feld als Gradient eines skalaren Feldes darstellen lässt, wird diese Maxwell´sche Gleichung durch den Ansatz

$$\underline{E}(\underline{r},t)+\frac{\partial\underline{A}(\underline{r},t)}{\partial t}=-\operatorname{grad}\phi(\underline{r},t)$$

erfüllt. Er definiert das <u>skalare Potential</u> des elektromagnetischen Feldes $\phi(\underline{r},t)$.

==

Die Lagrange-Funktion (H) enthält keine zyklischen Koordinaten und keine Anteile der Form $\frac{d}{dt}F(\underline{q},t)$.

3. Bei der Ableitung der Bewegungsgleichung $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)=\frac{\partial L}{\partial x_i},\ x_1=x,\ x_2=y,\ x_3=z$

gehen wir koordinatenweise vor. Für x(t) ist die linke Seite

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}+qA_x\,,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=m\ddot{x}+q\frac{dA_x}{dt}\ . \tag{H1}$$

Die rechte Seite ist etwas unübersichtlicher. Zunächst haben wir

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-q\frac{\partial\phi}{\partial x}+q\left(\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x}+\dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\overset{\Downarrow}{=}$$

Wir addieren die "nahrhafte Null" $0=\dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y}+\dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z}-\dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y}-\dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z}$ und erhalten

$$\overset{\Downarrow}{=}-q\frac{\partial\phi}{\partial x}+q\left(\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y}+\dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)-q\left(\dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y}-\dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x}\right)-q\left(\dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z}-\dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)=$$

$$=-q\frac{\partial\phi}{\partial x}+q(\dot{\underline{r}}\cdot\underline{\nabla})A_x+\left[\dot{\underline{r}}\times\underbrace{(\underline{\nabla}\times\underline{A})}_{\operatorname{rot}\underline{A}=\underline{B}}\right]_x=-q\frac{\partial\phi}{\partial x}+q\left(\frac{dA_x}{dt}-\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)+q\,(\dot{\underline{r}}\times\underline{B})_x=\frac{\partial L}{\partial x} \tag{H2}$$

Für die letzte Umformung haben wir $(\underline{\dot{r}} \cdot \underline{\nabla})\, A_x$ durch

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + (\underline{\dot{r}} \cdot \underline{\nabla})\, A_x \quad \text{d.h.} \; -\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{dA_x}{dt} = (\underline{\dot{r}} \cdot \underline{\nabla})\, A_x$$

ersetzt und verwenden rot $\underline{A} = \underline{B}$ verwendet.

(H1) und (H2) gleichgesetzt ergibt

$$m\,\ddot{x} + q\frac{dA_x}{dt} = q\left(\underbrace{-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}}_{E_x \text{ wegen } \underline{E} = -\operatorname{grad}\phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}} + \frac{dA_x}{dt} + (\underline{\dot{r}} \times \underline{B})_x \right) = q\,(\underline{E} + \underline{\dot{r}} \times \underline{B})_x \; .$$

Analoge Rechnungen für die die y- und die z-Koordinate führen auf die Newton´sche Bewegungsgleichung

$m\,\underline{\ddot{r}} = q\,(\underline{E} + \underline{\dot{r}} \times \underline{B})$ $\quad \rightarrow \quad$ Lorentz-Kraft,

wobei auf das Teilchen die Lorentz-Kraft wirkt. Also sind wir in (H) von der richtigen Lagrange-Funktion ausgegangen.

Für den Impuls finden wir $\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{r}}} =: \underline{p} = m\,\underline{\dot{r}} + q\,\underline{A}$. Der Term $q\,\underline{A}$ ist der Impulsübertrag vom elektromagnetischen Feld auf das geladene Teilchen.

Für die Energie E des Teilchens ergibt sich somit wie erwartet

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{r}}} \cdot \underline{\dot{r}} - L = (m\,\underline{\dot{r}} + q\,\underline{A}) \cdot \underline{\dot{r}} - \left[\frac{m}{2}\underline{\dot{r}}^2 - q\,\phi(\underline{r},t) + q\,\underline{\dot{r}} \cdot \underline{A}(\underline{r},t) \right] = \frac{m}{2}\underline{\dot{r}}^2 + q\,\phi(\underline{r},t) =: E\,.$$

Dabei ist $q\,\phi(\underline{r},t)$ die potenzielle Energie des Teilchens, das Magnetfeld verrichtet keine Arbeit am Teilchen.

- **Eichtransformation und Eichinvarianz**

Das Vektorpotential $\underline{A}(\underline{r},t)$ und das skalare Potential $\phi(\underline{r},t)$ des elektromagnetischen Feldes sind nicht eindeutig bestimmt, denn die magnetische Induktion $\underline{B}(\underline{r},t)$ und die elektrische Feldstärke $\underline{E}(\underline{r},t)$ sind invariant unter der Transformation

$$\underline{A}(\underline{r},t) \to \underline{\tilde{A}}(\underline{r},t) = \underline{A}(\underline{r},t) + \operatorname{grad}\chi(\underline{r},t), \quad \phi(\underline{r},t) \to \tilde{\phi}(\underline{r},t) = \phi(\underline{r},t) - \frac{\partial\chi(\underline{r},t)}{\partial t} \quad ,$$

wobei $\chi(\underline{r},t)$ eine beliebige stetige, nach $\underline{r}$ und t differenzierbare Funktion sein kann, denn

$$\underline{\tilde{B}}(\underline{r},t) = \operatorname{rot}\underline{\tilde{A}}(\underline{r},t) = \operatorname{rot}\left[\underline{A}(\underline{r},t) + \operatorname{grad}\chi(\underline{r},t)\right] = \operatorname{rot}\underline{A}(\underline{r},t) = \underline{B}(\underline{r},t)\,,$$

$$\underline{\tilde{E}}(\underline{r},t) = -\operatorname{grad}\tilde{\phi}(\underline{r},t) - \frac{\partial\underline{\tilde{A}}(\underline{r},t)}{\partial t} = -\operatorname{grad}\left[\phi(\underline{r},t) - \frac{\partial\chi(\underline{r},t)}{\partial t}\right] - \frac{\partial}{\partial t}\left[\underline{A}(\underline{r},t) + \operatorname{grad}\chi(\underline{r},t)\right] =$$
$$= -\operatorname{grad}\phi(\underline{r},t) - \frac{\partial\underline{A}(\underline{r},t)}{\partial t} = \underline{E}(\underline{r},t)\,.$$

Diese Transformation heißt Eichtransformation, die Invarianz der Felder Eichinvarianz.

Die Lagrange-Funktion $L(\underline{r},\dot{\underline{r}},t) = \frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 - q\,\phi(\underline{r},t) + q\,\dot{\underline{r}}\cdot\underline{A}(\underline{r},t)$ ändert sich unter der Eichtransformation wie folgt:

$$\tilde{L}(\underline{r},\dot{\underline{r}},t) = \frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 - q\,\tilde{\phi} + q\,\dot{\underline{r}}\cdot\tilde{\underline{A}} = \frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 - q\left(\phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}\right) + q\,\dot{\underline{r}}\cdot\left(\underline{A} + \operatorname{grad}\chi\right) =$$
$$= \underbrace{\frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 - q\,\phi + q\,\dot{\underline{r}}\cdot\underline{A}}_{L(\underline{r},\dot{\underline{r}},t)} + q\underbrace{\left(\frac{\partial\chi}{\partial t} + \operatorname{grad}\chi\cdot\dot{\underline{r}}\right)}_{\frac{d\chi(\underline{r},t)}{dt}} = L(\underline{r},\dot{\underline{r}},t) + \frac{d\chi(\underline{r},t)}{dt} \quad .$$

Die transformierte Lagrange-Funktion enthält einen einzigen Zusatzterm, nämlich die vollständige Ableitung nach der Zeit der Funktion $\chi(\underline{r},t)$. Dieser Term spielt keine Rolle bei der Ableitung der Bewegungsgleichung.
Also ist die Bewegungsgleichung $m\,\ddot{\underline{r}} = q\,(\underline{E} + \dot{\underline{r}}\times\underline{B})$ eichinvariant.

■ **Beispiel**: Auf welcher Bahnkurve bewegt sich ein kleine Kugel unter dem Einfluss der Schwerkraft ($m\,\underline{g}$) reibungsfrei auf der Innenseite eines Kreiskegels?

Die Kugel wird als Massepunkt aufgefasst, ihre Rotationsenergie vernachlässigt.

1. Wahl der verallgemeinerten Koordinaten

Da die Bewegung auf die Innenseite des Kegels eingeschränkt ist, haben wir zwei Freiheitsgrade (f = 3N – R = 3 – 1 = 2). Wir orientieren die z-Achse in Richtung der Symmetrieachse des Kegels mit dem Öffnungswinkel 2α und wählen $q_1 = \varphi$ um die axiale Rotationssymmetrie auszunutzen und $q_2 = r$ zur eindeutigen Festlegung der Lage des Massepunkts auf der Kegeloberfläche (Skizze).

Die Transformationsformeln von den kartesischen Koordinaten x(t), y(t), z(t) auf die verallgemeinerten Koordinaten $\varphi(t)$ und $r(t)$ lauten

$$x = r\sin\alpha\cos\varphi$$
$$y = r\sin\alpha\sin\varphi$$
$$z = r\cos\alpha$$

Die gewählten verallgemeinerten Koordinaten erfüllen die Zwangsbedingung

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad \tan\alpha = \frac{\rho}{z} \quad \text{also} \quad \underline{g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2\tan^2\alpha = 0}, \quad \text{denn}$$

$$x^2 + y^2 - z^2\tan^2\alpha = r^2\sin^2\alpha\cos^2\varphi + r^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi - r^2\cos^2\alpha\ \mathrm{tg}^2\alpha = 0\,.$$

2. Kinetische und potenzielle Energie als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und Geschwindigkeiten, Lagrange-Funktion, zyklische Variable, Terme d/dt F(q,t)

<u>kinetische Energie</u>: $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = ... = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha)$,

denn $\dot{x} = \dot{r}\ \sin\alpha\ \cos\varphi - r\ \sin\alpha\ \dot{\varphi}\sin\varphi,\ \dot{y} = ...$ usw.

<u>potenzielle Energie</u>: $U = mg\,z = mg\,r\cos\alpha$

<u>Lagrange-Funktion</u>: $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha) - mg\,r\cos\alpha = L(r,\dot{r},\dot{\varphi})$ (H)

Die Koordinate φ ist zyklische, d.h.

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m r^2 \dot\varphi \sin^2\alpha =: L_z = \text{const} \tag{H1}$$

ist ein Integral der Bewegung → <u>Drehimpulserhaltung</u>. Grund: <u>Rotationssymmetrie</u> - Potenzial und Zwangbedingung sind invariant gegen Rotationen um die z-Achse.

p_φ ist der Drehimpuls, denn $\underline{L} = m\underline{r} \times \dot{\underline{r}} = m \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ x & y & 0 \\ \dot x & \dot y & 0 \end{vmatrix} = m r^2 \dot\varphi \sin^2\alpha\, \underline{e}_z = L_z \underline{e}_z$.

Die Lagrange-Funktion (H) ist nicht explizit zeitabhängig, also gilt → <u>Energieerhaltung</u>

$$T + U = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 \sin^2\alpha) + m g r \cos\alpha =: E = \text{const} \tag{H2}$$

3. Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \;\rightarrow\; \frac{d}{dt}(m r^2 \dot\varphi \sin^2\alpha) = 0 \qquad \text{oder} \qquad \dot\varphi = \frac{L_z}{m r^2 \sin^2\alpha} \tag{H1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \;\rightarrow\; m\ddot r - m r \dot\varphi^2 \sin^2\alpha + m g \cos\alpha = 0 \tag{H3}$$

4. Lösung der Lagrange-Gleichungen unter Berücksichtigung der Integrale der Bewegung, Bestimmung der Integrationskonstanten, Diskussion der Lösung.

Anstatt die ODE 2. Ordnung (H3) zu integrieren, verwenden wir (H1) in (H2), da diese Gleichungen nur Ableitungen erster Ordnung der gesuchten Funktionen r(t) und φ(t) enthalten. Aus $E = \frac{m}{2}\dot r^2 + \frac{m}{2} r^2 \frac{L_z^2}{(m r^2 \sin^2\alpha)^2} \sin^2\alpha + m g r \cos\alpha$ folgt

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U_{eff}(r) \quad \text{mit} \quad U_{eff}(r) := \frac{L_z^2}{2m\sin^2\alpha}\frac{1}{r^2} + mg\cos\alpha\, r \ . \tag{H4}$$

(H4) beschreibt die <u>eindimensionale</u> Bewegung eines Massepunkts im effektiven Potenzial $U_{eff}(r)$, dessen erster Term vom Drehimpuls abhängt ($\rightarrow$ Fliehkraftbarriere).

Aus (H4) lässt sich die Umkehrfunktion $t(r)$ von $r(t)$ bestimmen

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U_{eff}(r)\right]} \quad \rightarrow \quad t = t_0 + \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr'}{\sqrt{\left[E - U_{eff}(r)\right]}}, \quad r(t_0) = r_0 \ .$$

Das ist wieder ein elliptisches Integral, wir können es "zur Not" numerisch auswerten. Aus (H1) finden wir schließlich $\varphi(t)$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L_z}{m r^2 \sin^2\alpha} \quad \rightarrow \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \frac{L_z}{m\sin^2\alpha}\int_{t_0}^{t}\frac{dt'}{r^2(t')}, \quad \varphi(t_0) = \varphi_0 \ .$$

Die Integrationskonstanten ergeben sich aus vier Anfangsbedingungen $r(t_0) = r_0$, $\varphi(t_0) = \varphi_0$, $\dot{r}(t_0) = v_0$ und $\dot{\varphi}(t_0) = \omega_0$ oder aus $r(t_0) = r_0$, $\varphi(t_0) = \varphi_0$, E und L_z.

Diskussion der Lösung, qualitative Beschreibung der Bahnkurven (Skizze)
Aus dem Verlauf der effektiven potenziellen Energie,
folgt, dass es sich um eine periodische Bewegung
zwischen zwei Umkehrpunkten r_1 und r_2 handelt.
Diese sind die Nullstellen der Gleichung

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 = E - U_{eff}(r) = 0$$

und hängen dadurch von E und L_z ab. Der
klassisch erlaubte Bereich der Bewegung
$r_1 < r(t) < r_2$ ist durch $\frac{m}{2}\dot{r}^2 = E - U_{eff}(r) \geq 0$

gegeben. In den Umkehrpunkten der Bewegung ist die Geschwindigkeit des MP verschieden von Null, da $\dot{\varphi} = \dfrac{L_z}{m\sin^2\alpha\, r_{1/2}^2} \neq 0$, vorausgesetzt $L_z \neq 0$.

Fazit: Die kleine Kugel gleitet auf einer wellenförmigen, im allgemeinen nicht geschlossenen Bahn im „Trichter“ auf und ab, die durch die Kreise $z_1 = r_1 \cos\alpha$ und $z_2 = r_2 \cos\alpha$ von unten bzw. oben begrenzt ist. Fällt die Energie E unter den Wert des Minimums der effektiven potenziellen Energie

$$U_{eff}^{min} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} a^{1/3} b^{2/3} \sim L_z^{2/3}, \; a := \frac{L_z^2}{2m\sin^2\alpha}, \; b := mg\cos\alpha \; ,$$

ist keine Bewegung möglich.

All diese Schlussfolgerungen gelten nur, wenn Reibung und Rotationsenergie der Kugel vernachlässigt werden.

□ **Beispiel: Eindimensionale Kette harmonisch gekoppelter Massepunkte** (x-Richtung)

Wir betrachten N Massepunkte auf der x – Achse, die durch Federn (Federkonstante k) verbunden sind. Im nichtausgelenkten Zustand ist der Abstand zwischen benachbarten Massepunkten gleich a (Skizze).

Als verallgemeinerte Koordinate wählen wir die Auslenkung aus der Gleichgewichtslage $q_i = \phi_i$, $i = 1, 2, ..., N$.

Die kinetische Energie aller Massepunkte ist $T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m \dot{\phi}_i^2$.

Bei der Auslenkung aus der x-Achse ändert sich der Abstand zwischen zwei benachbarten Massepunkten um

$$\Delta\ell = \sqrt{a^2 + (\phi_{i+1} - \phi_i)^2} - a = a\sqrt{1 + \left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{a}\right)^2} \approx \frac{1}{2} a \left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{a}\right)^2 \quad \text{(kleine Auslenkungen).}$$

Daraus folgt für die potenzielle Energie $U = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} k a \left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{a}\right)^2$

und die für die Lagrange-Funktion $L = T - U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \left[m \dot{\phi}_i^2 - k a \left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{a}\right)^2 \right]$.

Die Euler-Lagrange-Gleichungen für den i-ten Massepunkt $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi_i} = 0$ lauten

$$\underline{\ddot{\phi}_i - \frac{k}{m/a} \frac{1}{a} \left[\left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{a}\right) - \left(\frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{a}\right) \right] = 0 .}$$

Beim Übergang $a \to 0$ von der diskreten zur kontinuierlichen Beschreibung gilt

$$\phi_i \to \phi(x),\ \phi_{i+1} \to \phi(x + a)\ \ \phi_{i-1} \to \phi(x - a) \ .$$

Da

$$\lim_{a\to 0}\frac{\phi_{i+1}-\phi_i}{a}=\lim_{a\to 0}\frac{\phi(x+a)-\phi(x)}{a}=\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{x+\frac{a}{2}},\quad \lim_{a\to 0}\frac{\phi_i-\phi_{i-1}}{a}=\lim_{a\to 0}\frac{\phi(x)-\phi(x-a)}{a}=\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{x-\frac{a}{2}}$$

folgt

$$\lim_{a\to 0}\frac{1}{a}\left[\left(\frac{\phi_{i+1}-\phi_i}{a}\right)-\left(\frac{\phi_i-\phi_{i-1}}{a}\right)\right]=\lim_{a\to 0}\frac{1}{a}\left(\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{x+\frac{a}{2}}-\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{x-\frac{a}{2}}\right)=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}.$$

Für die Bewegungsgleichung resultiert daraus im Grenzübergang $a \to 0$

$$\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2}-\frac{k}{\rho}\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2}=0.$$

Diese partielle Differentialgleichung (Wellengleichung) beschreibt die Auslenkungen $\phi(x,t)$ einer schwingenden Saite, $\rho=\lim\limits_{\substack{a\to 0\\ m\to 0}}\frac{m}{a}=\text{const}$ ist die Dichte und k die "Elastizitätskonstante".

2.6 Lagrange´sche Mechanik für Felder

Alternatives allgemeines Konzept zur Behandlung kontinuierlicher Systeme.

Einführung einer Lagrange-Dichte Λ

$$L = \int_V d^3r\, \Lambda \quad \Lambda = \Lambda\left(\phi, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}, \frac{\partial\phi}{\partial t}, x, y, z, t\right) \text{ für die Feldfunktionen } \phi(x,y,z,t)$$

Letztere übernehmen die Rolle der generalisierten Koordinaten, während die räumlichen Koordinaten x, y und z unabhängige Variable wie die Zeit t werden.

Prinzip der kleinsten Wirkung (analog zur Punktmechanik): Die gesuchte Funktion $\phi(\underline{r}, t)$ extremalisiert das Wirkungsfunktional, d.h., für die Variation erster Ordnung von S gilt

$$\delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2} dt\, L = \delta\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3r\, \Lambda \overset{!}{=} 0 \qquad \text{wobei} \qquad \delta\phi(t_1) = \delta\phi(t_2) = \delta\phi(\partial V) = 0\ ,$$

d.h., zum Anfangs- und Endzeitpunkt t_1 bzw. t_2 sowie auf dem Rand ∂V des abgeschlossenen Volumens V sind die Variationen von ϕ gleich Null.

Analoge Vorgehensweise wie in der Punktmechanik führt auf die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial\phi/\partial t)}\right) + \sum_{i=1}^{3} \frac{d}{dx_i}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial\phi/\partial x_i)}\right) - \frac{\partial\Lambda}{\partial\phi} = 0\,.$$

Für mehrere unabhängige Felder $\phi_k(\underline{r}, t)$ gilt eine analoge Gleichung für jedes $\phi_k(\underline{r}, t)$.

Im Fall der schwingenden Saite erhalten wir aus der Lagrange-Dichte

$$\Lambda = \mathcal{T} - \mathcal{U} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2$$

(Differenz aus den Dichten der kinetischen und potenziellen Energien) für $\phi(x,t)$ die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial\phi/\partial t)}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial\phi/\partial x)}\right) - \frac{\partial\Lambda}{\partial\phi} = 0 \qquad \text{also wie oben} \qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{k}{\rho}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0\,.$$