

2.7 Bewegungsbeschränkungen (BB), Zwangsbedingungen (ZB) + Zwangskräfte (ZK). Lagrange-Gleichungen I. Art

Beispiele:

- 1) Eine kleine Kugel rollt reibungsfrei im Innern eines Trichters (vgl. Kap. 2.6)

- 2) Pendel mit rotierendem Aufhängepunkt

$$x = R \cos \Omega t + \ell \sin \varphi$$

$$y = R \sin \Omega t - \ell \cos \varphi$$

$$z = 0$$

Zwangbedingung:

Skizze

$$g(x, y, t) = (x - R \cos \Omega t)^2 + (y - R \sin \Omega t)^2 - \ell^2 = 0$$

- 3) Massepunkt gleitet reibungsfrei auf einer rotierenden Stange

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi, \quad \varphi = \omega t$$

Skizze

$$\text{Zwangbedingung: } g(x, y, t) = \arctg \frac{y}{x} - \omega t = 0$$

- 4) Kleine Kugel rollt im Schwerfeld reibungsfrei vom oberen Pol einer größeren Kugel mit dem Radius R

$$\text{Zwangbedingung: } x^2 + y^2 - R^2 \geq 0$$

Skizze

- 5) Eine Münze rollt reibungsfrei in der x-y-Ebene

Die Bogengeschwindigkeit des Scheibenrandes $R \dot{\varphi}$ (φ - Rotationswinkel) ist gleich dem Betrag der Geschwindigkeit v des Berührungspunktes auf der Ebene, $v = R \dot{\varphi}$. Aus

$$v_x = \dot{x} = v \sin \theta$$

$$v_y = \dot{y} = -v \cos \theta$$

folgt die

$$\text{Zwangbedingung: } \begin{aligned} dx - R \sin \theta \, d\varphi &= 0 \\ dy + R \cos \theta \, d\varphi &= 0 \end{aligned}$$

Skizze

Der Scheibenmittelpunkt liegt stets über dem Berührungspunkt mit den Koordinaten (x, y) .

Klassifikation der Zwangbedingungen (ZB)

ZB der Form

$$\underline{g}_\alpha(\underline{r}, t) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, R$$

heißen **holonom** (integrabel).

Sind die Funktionen \underline{g}_α explizit zeitabhängig, werden die ZB **rheonom** genannt (Beispiele 2 und 3) oben); bei nicht explizit von t abhängigen \underline{g}_α wird von **skleronomen** ZB gesprochen (Beispiel 1 oben).

Nichtholnome ZB enthalten die Geschwindigkeiten, sind zwischen Differentialen (Beispiel 5) oben) oder unter Verwendung von Ungleichungen formuliert (Beispiel 4) oben).

Bei Bewegungsbeschränkungen ist die Bestimmung der Bahnkurven aus der Newton'schen Bewegungsgleichung (NBWG) u.U. schwierig. Um dies zu verdeutlichen, betrachten wir der Einfachheit halber zunächst die Bewegung eines Massepunkts unter Einwirkung der eingprägten Kraft \underline{F} , wenn eine holonome ZB vorliegt. Auch wenn die ZB formuliert werden kann, ist die entsprechende Zwangskraft \underline{Z} i.a. nicht gegeben, sondern hängt von der tatsächlichen, also noch unbekanntem Bahnkurve ab. Ohne \underline{Z} ist die rechte Seite der NBWG

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} + \underline{Z}$$

nicht vollständig bekannt und das erarbeitete "Rezept" zur Lösung von Bewegungsproblemen im Rahmen der Newton'schen Mechanik nicht unmittelbar anwendbar.

Liegt eine holonome ZB vor, gibt es folgende Möglichkeiten zur Berechnung der Bahnkurve:

A Wir eliminieren \underline{Z} durch Übergang zu verallgemeinerten Koordinaten $\underline{q}(t)$ gemäß der Transformationsformeln $\underline{r}(t) = \underline{r}(\underline{q}(t), t)$, wobei die $\underline{q}(t)$ die ZB identisch erfüllen müssen, $\underline{g}_\alpha(\underline{r}(\underline{q}(t), t)) \equiv 0$, $\alpha = 1, \dots, R$, und bestimmen die Bahnkurve $\underline{r}(t)$ aus $\underline{q}(t)$. Das ist die Vorgehensweise im Lagrange-II-Formalismus. Dieser ist elegant, allerdings fällt die ZK heraus und kann nicht explizit berechnet werden.

B Wir nutzen aus, dass eine holonome ZB die Bewegung auf die Fläche $g(\underline{r}, t) = 0$ im \mathbb{R}^3 einschränkt, ohne dabei die Bewegung innerhalb dieser Fläche zu beeinflussen. Demzufolge steht die Zwangskraft \underline{Z} senkrecht auf der Fläche $g(\underline{r}, t) = 0$; sie besitzt keine Komponenten "in Richtung" dieser Fläche. Das bedeutet $g(\underline{r}, t) = 0$ ist äquivalent zu $\underline{Z} \parallel \text{grad } g(\underline{r}, t)$, also zu $\underline{Z} = \lambda(t) \text{ grad } g(\underline{r}, t)$. Somit lautet die NBWG

$$m \ddot{\underline{r}} = \underline{F} + \underline{Z} = \underline{F} + \lambda(t) \text{ grad } g(\underline{r}, t),$$

wenn die Bewegung einer holonomen Zwangbedingung unterliegt. Der zeitabhängige Parameter $\lambda(t)$ bleibt zunächst unbestimmt.

Verallgemeinert auf ein System aus N Massepunkten und R holonomen Zwangbedingungen erhalten wir $3N + R$ Gleichungen der Form

$$m_n \ddot{\underline{r}}_n = \underline{F}_n(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) + \sum_{\alpha=1}^R \lambda_{\alpha}(t) \frac{\partial \underline{g}_{\alpha}(\underline{r}, t)}{\partial \underline{r}_n}, \quad g_{\alpha}(\underline{r}, t) = 0, \quad (H1)$$

$$\underline{r} = (r_1, \dots, r_{3N}) \quad \alpha = 1, \dots, R, \quad n = 1, \dots, 3N$$

für $3N$ unbekannte Funktionen $\underline{r}_n(t)$ und R unbekannte Parameter $\lambda_{\alpha}(t)$.

Um die $\lambda_{\alpha}(t)$ zu eliminieren, berechnen wir $\frac{d^2 \underline{g}_{\alpha}(\underline{r}, t)}{dt^2}$

$$0 = \frac{d^2 \underline{g}_{\alpha}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial \underline{g}_{\alpha}}{\partial \underline{r}_n} \dot{\underline{r}}_n + \frac{\partial \underline{g}_{\alpha}}{\partial t} \right) \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial \underline{g}_{\alpha}}{\partial \underline{r}_n} \ddot{\underline{r}}_n = G_{\alpha}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t), \quad \alpha = 1, \dots, R.$$

Die zweiten Ableitungen $\ddot{\underline{r}}_n$ treten lediglich linear auf, da die holonomen ZB $g_{\alpha}(\underline{r}, t) = 0$ unabhängig von $\dot{\underline{r}}$ sind. Die Funktionen G_{α} auf der rechten Seite subsummieren alle restlichen, also nicht $\ddot{\underline{r}}_n$ enthaltenden Terme.

Ersetzen wir nun $\ddot{\underline{r}}_n$ durch die rechten Seiten der BWG (H1), ergibt sich ein lineares inhomogenes algebraisches Gleichungssystem für die unbekanntenen Größen $\lambda_{\alpha}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)$

$$G_\alpha(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) = \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial \underline{r}_n} \ddot{r}_n = \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial \underline{r}_n} \frac{1}{m_n} \left[F_n(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) + \sum_{\beta=1}^R \lambda_\beta(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) \frac{\partial g_\beta(\underline{r}, t)}{\partial \underline{r}_n} \right].$$

Aus den Parametern $\lambda_\alpha(t)$ sind $\lambda_\alpha(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)$ geworden, da die Komponenten F_n der eingprägten Kraft von \underline{r}_n und $\dot{\underline{r}}_n$, jedoch nicht von \ddot{r}_n abhängen können.

Werden die Lösungen $\lambda_\alpha(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)$ in den rechten Seiten von (H1) verwendet, sind diese bekannt, d.h. die Bahnkurve $\underline{r}(t)$ kann aus

$$m_n \ddot{r}_n = F_n(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) + \sum_{\alpha=1}^R \lambda_\alpha(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) \frac{\partial g_\alpha(\underline{r}, t)}{\partial \underline{r}_n}, \quad \alpha = 1, \dots, R \quad (\text{H2})$$

berechnet werden.

Für die Komponenten der Zwangskraft erhalten wir

$$Z_n(t) = \sum_{\alpha=1}^R \lambda_\alpha(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) \frac{\partial g_\alpha(\underline{r}, t)}{\partial \underline{r}_n}, \quad (\text{H3})$$

wobei $\underline{r}(t)$ die aus (H2) ermittelte Lösung ist. Beachte, dass aus $\lambda_\alpha(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)$ für die Bahnkurve $\underline{r}(t)$ R Parameter $\lambda_\alpha(t)$ werden.

● Zusammenhang zwischen Lagrange I und Lagrange II

Wählen wir $f = 3N - R$ verallgemeinerte Koordinaten $\underline{q}(t)$ derart, dass $g_\alpha(\underline{r}(\underline{q}, t), t) \equiv 0$, dann ist

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial \underline{q}_k} = 0 \quad \text{also} \quad \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial \underline{r}_n} \frac{\partial \underline{r}_n}{\partial \underline{q}_k} = 0, \quad k = 1, \dots, f.$$

Mit dieser Beziehung lassen sich die Zwangskräfte aus der Bewegungsgleichung (H1)

eliminieren. Dazu wird (H1) komponentenweise mit $\frac{\partial \underline{r}_n}{\partial \underline{q}_k}$ multipliziert und über n summiert

$$\sum_{n=1}^{3N} m_n \ddot{\mathbf{r}}_n \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial q_k} = \sum_{n=1}^{3N} F_n \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial q_k} + \sum_{\alpha=1}^R \lambda_{\alpha}(t) \underbrace{\sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial \mathbf{g}_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_n} \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial q_k}}_{\text{Null}} .$$

Der zweite Term auf der rechten Seite verschwindet, aus dem Rest folgen die Lagrange-Gleichungen II. Art, vgl. Kapitel 1.3, ab (H2) unter Berücksichtigung von $\frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial q_k} = (\mathbf{e}_k)_n$.

● **Rezept" zur Lösung von Bewegungsproblemen mit Lagrange I**
(im Fall holonomer Zwangbedingungen)

- (i) Wähle die Koordinaten und formuliere die Zwangbedingungen.
- (ii) Bestimme die Lagrange-Funktion und stelle die Lagrange-Gleichungen I. Art unter Berücksichtigung des Ansatzes $Z_n = \sum_{\alpha=1}^R \lambda_{\alpha}(t) \frac{\partial \mathbf{g}_{\alpha}(\underline{\mathbf{r}}, t)}{\partial \mathbf{r}_n}$ auf.
- (iii) Bestimme die Abhängigkeiten $\lambda_{\alpha}(\underline{\mathbf{r}}, \dot{\underline{\mathbf{r}}}, t)$, indem die ZB zweifach nach der Zeit t abgeleitet und die $\ddot{\underline{\mathbf{r}}}$ mit Hilfe der Bewegungsgleichungen eliminiert werden.
- (iv) $\lambda_{\alpha}(\underline{\mathbf{r}}, \dot{\underline{\mathbf{r}}}, t)$ in die Lagrange-Gleichungen I. Art einsetzen, diese integrieren und aus den Anfangsbedingungen die Integrationskonstanten ermitteln.

- (v) Berechne unter Verwendung der ermittelten Bahnkurve $\underline{\mathbf{r}}(t)$ aus

$$Z_n = \sum_{\alpha=1}^R \lambda_{\alpha}(\underline{\mathbf{r}}, \dot{\underline{\mathbf{r}}}, t) \frac{\partial \mathbf{g}_{\alpha}(\underline{\mathbf{r}}, t)}{\partial \mathbf{r}_n}$$

die Komponenten Zwangskraft und diskutiere die Lösung.

- Einfaches Beispiel: Gleitende Kugel auf gleitendem Keil (reibungsfrei)

A: Lagrange I

Skizze

(i) Koordinaten der Kugel $x(t)$, $y(t)$, des Keiles $X(t)$ (Skizze)

Zwangbedingung: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h-y}{x-X}$ also $g(x, y, X) = y + (x - X) \operatorname{tg} \alpha - h = 0$

(ii) Lagrange-Funktion: $L = \frac{M}{2} \dot{X}^2 + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$

~~$\tilde{L} = \frac{M}{2} \dot{X}^2 + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \lambda [y + (x - X) \operatorname{tg} \alpha - h]$~~

Lagrange-Gleichungen I. Art $m \ddot{\underline{r}} = \underline{F} + \lambda(t) \operatorname{grad} g(\underline{r}, t)$, also komponentenweise

$$\left. \begin{array}{l} r_1 = x: m \ddot{x} = \lambda(t) \operatorname{tg} \alpha \\ r_2 = y: m \ddot{y} = \lambda(t) - mg \\ r_3 = X: M \ddot{X} = -\lambda(t) \operatorname{tg} \alpha \end{array} \right\} \text{(H)}$$

(iii) Zwangbedingung zweifach nach t abgeleitet:

$$\frac{d^2 g}{dt^2} = 0 \rightarrow \ddot{y} + (\ddot{x} - \ddot{X}) \operatorname{tg} \alpha = 0 \text{ und } \ddot{x}, \ddot{y} \text{ sowie } \ddot{X} \text{ mit Hilfe von (H) eliminiert ergibt}$$

$$\lambda(t) - mg + \left(\lambda(t) \operatorname{tg} \alpha + \frac{m}{M} \lambda(t) \operatorname{tg} \alpha \right) \operatorname{tg} \alpha = 0, \text{ also } \lambda(t) = \frac{mg}{1 + \left(1 + \frac{m}{M} \right) \operatorname{tg}^2 \alpha} = \text{const.}$$

Folglich ist λ in unserem einfachen Beispiel zeitunabhängig.

(iv) Damit sind die rechten Seiten der Bewegungsgleichungen (H) konstant, d.h., sie beschreiben eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen ergibt sich sofort

$$x(t) = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 + \left(1 + \frac{m}{M}\right) \operatorname{tg}^2\alpha} \frac{g}{2} t^2, \quad y(t) = h - \left(1 - \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{m}{M}\right) \operatorname{tg}^2\alpha}\right) \frac{g}{2} t^2, \quad X(t) = -\frac{m}{M} \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 + \left(1 + \frac{m}{M}\right) \operatorname{tg}^2\alpha} \frac{g}{2} t^2.$$

(v) Diskussion:

a) $x(t)$: Für $M \gg m$ ist die Beschleunigung $\frac{g \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = g \operatorname{tg}\alpha \cos^2\alpha = g \sin\alpha \cos\alpha$. Das ist, wie zu erwarten, die x-Komponente der "Hangabtriebsbeschleunigung" $g \sin\alpha$.

b) Wie weit ist der Keil gerutscht, wenn die Kugel bei $y = 0$ angelangt ist?

$$\text{Aus } y = 0 \text{ folgt } h = \left(1 - \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{m}{M}\right) \operatorname{tg}^2\alpha}\right) \frac{g}{2} t^2, \quad \frac{g}{2} t^2 = \frac{h}{(\dots)} \text{ eingesetzt in } X(t) \text{ ergibt}$$

$$X_{\max} := X(y = 0) = -\frac{m}{M} \frac{h}{\left(1 + \frac{m}{M}\right) \operatorname{tg}\alpha} = -\frac{h \operatorname{ctg}\alpha}{1 + \frac{M}{m}}.$$

Wir finden $X_{\max} \rightarrow 0$ für $M \rightarrow \infty$ und $X_{\max} \rightarrow -\infty$ für $\alpha \rightarrow 0$.

■ Beispiel: Gleitende Kugel auf gleitendem Keil (reibungsfrei)

B: Lagrange II

Bei der Lösung des gleichen Problems über Lagrange II wählen wir wieder die Koordinate $X(t)$ für die Position des Keils aber, um die Zwangbedingung identisch erfüllen zu können, als verallgemeinerte Koordinate den zurückgelegten Weg $s(t)$ anstelle von $x(t)$ und $y(t)$

($f = 3 - 2 = 1$). Dann ist

$$x = X + s \cos \alpha, \quad y = h - s \sin \alpha, \quad g(x, y, X) = \operatorname{tg} \alpha - \frac{h - y}{x - X} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{s \sin \alpha}{s \cos \alpha} \equiv 0.$$

Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} L &= \frac{M}{2} \dot{X}^2 + \frac{m}{2} [(\dot{X} + \dot{s} \cos \alpha)^2 + \dot{s}^2 \sin^2 \alpha] - mg(h - s \sin \alpha) = \\ &= \frac{M+m}{2} \dot{X}^2 + \frac{m}{2} \dot{s}^2 + m \dot{X} \dot{s} \cos \alpha + mgs \sin \alpha - mgh \end{aligned}$$

Die Koordinate X ist zyklisch, d.h.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = (M+m)\dot{X} + \underbrace{m \cos \alpha \dot{s}}_{\dot{x} - \dot{X}} = \text{const} \stackrel{AB}{=} 0 \quad \text{bzw.} \quad M\dot{X} + m\dot{x} = 0 \rightarrow \text{Impulserhaltung.}$$

Die Lagrange-Funktion enthält die Zeit nicht explizit, also gilt Energieerhaltung

$$E = \frac{M}{2} \dot{X}^2 + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = \text{const} \stackrel{AB}{=} mgh.$$

Lagrange-Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right) &= \frac{d}{dt} (m\dot{s} + m \cos \alpha \dot{X}) \\ \frac{\partial L}{\partial s} &= mg \sin \alpha \end{aligned} \right\} m \cos \alpha \ddot{X} + m\ddot{s} - mg \sin \alpha = 0,$$

sowie die schon abgeleitete Gleichung

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \right) = (M+m)\ddot{X} + m \cos \alpha \ddot{s} = 0.$$

Aus dieser folgt $m\ddot{s} = -\frac{M+m}{\cos \alpha} \ddot{X}$. Eingesetzt in die Gleichung für \ddot{X} finden wir

$$m \cos \alpha \ddot{X} - \frac{M+m}{\cos \alpha} \ddot{X} - mg \sin \alpha = 0, \quad \text{also wie bei Lagrange I}$$

$$\ddot{X} = -\frac{m}{M} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \left(1 + \frac{m}{M}\right) \operatorname{tg}^2 \alpha} g = \text{const} \quad \text{usw.}$$

- Beispiel: Lösung der Aufgabe nur auf der Basis von Energie- und Impulserhaltung

Impulserhaltung $M\dot{X} + m\dot{x} = \text{const} \stackrel{\text{AB}}{=} 0$ führt unter Verwendung der AB $X(0) = x(0) = 0$ auf

$$\underline{X = -\frac{m}{M} x.} \quad \text{Aus der ZB } y = h - (x - X) \operatorname{tg} \alpha \quad \text{wird} \quad \underline{y = h - x \left(1 + \frac{m}{M}\right) \operatorname{tg} \alpha} \quad \text{und}$$

$$\underline{\dot{y} = -\left(1 + \frac{m}{M}\right) \operatorname{tg} \alpha \dot{x}.}$$

Damit lassen sich X , y und \dot{y} im Energieerhaltungssatz

$$E = \frac{M}{2} \dot{X}^2 + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = \text{const} \stackrel{\text{AB}}{=} mgh$$

eliminieren. Nach einfachen Umformungen finden wir

$$\dot{x}^2 = 2ax \quad \text{mit} \quad a := g \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \left(1 + \frac{m}{M}\right) \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Integration unter Berücksichtigung der AB ergibt wieder wie oben

$$x(t) = \frac{a}{2} t^2, \quad X(t) = -\frac{m}{M} \frac{a}{2} t^2 \quad \text{und} \quad y(t) = h - \left(1 + \frac{m}{M}\right) \operatorname{tg} \alpha \frac{a}{2} t^2.$$

2.8 Lagrange-Gleichungen I. Art als Variationsproblem mit Nebenbedingungen

Wir leiten die Bewegungsgleichungen nun aus dem Hamilton'schen Variationsprinzip $\delta S[\underline{r}(t)] = 0$ unter Berücksichtigung von R Nebenbedingungen der Form $g_\alpha(\underline{r}, t) = 0$, $\alpha = 1, \dots, R$ ab, also ohne Rückgriff auf die Newton'schen Bewegungsgleichung. Dabei gehen wir wie in Kap. 2.3 vor, verwenden jedoch zunächst keine verallgemeinerten Koordinaten. Für die Variation der Wirkung infolge einer Variation $\delta \underline{r}(t)$ entlang einer Trajektorie $\underline{r}(t)$ mit $\delta \underline{r}(t_1) = \delta \underline{r}(t_2) = 0$ ergibt sich in erster Ordnung

$$0 = \delta S[\underline{r}(t)] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial r_i} \delta r_i + \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \delta \dot{r}_i + \dots =$$

$$\sum_{i=1}^{3N} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial r_i} \delta r_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \delta r_i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right) \delta r_i \right] = \sum_{i=1}^{3N} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right) \right] \delta r_i.$$

Integration über $t \rightarrow \text{Null}$,
da $\delta r_i(t_1) = \delta r_i(t_2) = 0$

In Kap. 2.3 waren die Komponenten δr_i der Variation $\delta \underline{r}$ der Bahnkurve beliebige, voneinander unabhängige (kleine) Größen und aus der Forderung $\delta S[\underline{r}(t)] = 0$ folgten die Lagrange-Gleichungen II. Art, da die Ausdrücke in den eckigen Klammern im letzten Ausdruck verschwinden müssen. Jetzt sind die δr_i nicht voneinander unabhängig, sondern über die Nebenbedingungen miteinander gekoppelt: Da auch die variierten Bahnkurven die Nebenbedingungen erfüllen müssen, ist

$$g_\alpha(\underline{r} + \delta \underline{r}, t) = g_\alpha(\underline{r}, t) + \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial r_i} \delta r_i + O((\delta r_i)^2), \text{ also } \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial r_i} \delta r_i = 0, \alpha = 1, \dots, R$$

für kleine δr_i .

Ein effektives und elegantes Verfahren zur Lösung von Extremalproblemen mit Nebenbedingungen ist die [Methode der unbestimmten Multiplikatoren von Lagrange](#).

Lagrange betrachtete anstelle von $S[\underline{r}(t)]$ das Funktional

$$\tilde{S}[\underline{r}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \tilde{L}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t), \quad \tilde{L}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) = L(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) + \sum_{\alpha=1}^R \lambda_\alpha(t) g_\alpha(\underline{r}, t)$$

mit zunächst unbekanntem Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_\alpha(t)$.

Es folgt

$$\delta \tilde{S}[\underline{r}(t)] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \tilde{L}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) = \dots = \sum_{i=1}^{3N} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right) + \sum_{\alpha=1}^R \lambda_{\alpha}(t) \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial r_i} \right] \delta r_i = 0.$$

Weil wir die Nebenbedingungen noch nicht verwendet haben, sind jetzt alle δr_i unabhängig voneinander. Es muss also

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial r_i} = \underbrace{\sum_{\alpha=1}^R \lambda_{\alpha}(t) \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial r_i}}_{Z_i}, \quad i = 1, \dots, 3N \quad \text{Lagrange-Gleichungen I. Art}$$

gelten. Die Lösungen $r_i(t; \underline{\lambda}(t))$ der Lagrange-Gleichungen I. Art hängen von den Lagrange-Multiplikatoren ab, die mit Hilfe der R Nebenbedingungen $g_{\alpha}[r_i(t; \underline{\lambda}(t)), t] = 0$ bestimmt werden. Auf der rechten Seite der Gleichung stehen die Komponenten der Zwangskraft Z_i .

FAZIT: Das Hamilton'sche Variationsprinzip führt, angewendet auf Systeme mit Zwangbedingungen (Bewegungsbeschränkungen) auf Lagrange-Gleichungen I. Art. Die Zwangbedingungen werden zu Nebenbedingungen des Variationsproblems.

Bemerkung:

Im Fall nichtholonomer Zwangbedingungen gibt es i.a. keine "straightforward method" zur Lösung des Bewegungsproblems.

Liegen die nichtholonome Zwangbedingungen aber z.B. in differentieller Form entsprechend

$$\sum_{i=1}^{3N} a_i(\underline{r}) dr_i = 0 \quad \text{vor, wobei sind sie unter bestimmten Bedingungen einer holonomen}$$

Zwangbedingung der Form $U(\underline{r}) = \text{const}$ äquivalent. Dazu muss $\sum_{i=1}^{3N} a_i(\underline{r}) dr_i = dU$ mit

$a_i(\underline{r}) = \frac{\partial U}{\partial r_i}$ gelten (vollständiges Differential). Die notwendigen und hinreichenden

Bedingungen dafür sind $\frac{\partial a_i}{\partial r_k} = \frac{\partial^2 U}{\partial r_k \partial r_i} = \frac{\partial}{\partial r_i} \left(\frac{\partial U}{\partial r_k} \right) = \frac{\partial a_k}{\partial r_i}$ bzw. "rot $\underline{a} = 0$ ".

- Beispiel: Kleine Kugel im Trichter (Reibung und Rotationsenergie vernachlässigen)

Die Bahnkurve eines Massepunkts, der sich unter dem Einfluss der Schwerkraft (\mathbf{g}) reibungsfrei auf der Innenseite eines Kreiskegels bewegt, haben wir bereits in Kap. 2.5 im Rahmen von Lagrange II diskutiert. Hier soll die Lösung gemäß Lagrange I, also einschließlich der Berechnung der Zwangskräfte skizzierte werden.

Aus Symmetriegründen wählen wir Zylinderkoordinaten mit der z-Achse als Rotationsachse des Kegels $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, z . Die holonome Zwangbedingung $g(r, z) = r - \operatorname{tg} \alpha z = 0$ wird durch diese Koordinatenwahl nicht identisch erfüllt, also nicht eliminiert! In Zylinderkoordinaten lautet die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz = L(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}, z, \dot{z}).$$

Daraus finden wir leicht die Lagrange-Gleichungen I. Art

$$m \ddot{z} = -mg + Z_z = -mg + \lambda \frac{\partial g}{\partial z} = -mg - \lambda \operatorname{tg} \alpha,$$

$$m(\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) = Z_r = \lambda \frac{\partial g}{\partial r} = \lambda,$$

$$m(r \ddot{\varphi} + 2\dot{r} \dot{\varphi}) = Z_\varphi = \lambda \frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0.$$

Die Zwangbedingung, zweifach nach der Zeit abgeleitet, liefert $\ddot{r} - \operatorname{tg} \alpha \ddot{z} = 0$, woraus sich für den unbekannt Parameter λ unter Verwendung der Ausdrücke für \ddot{r} und \ddot{z} die Beziehung $0 = m\ddot{r} - \operatorname{tg} \alpha m \ddot{z} = m r \dot{\varphi}^2 + \lambda - \operatorname{tg} \alpha (-mg - \lambda \operatorname{tg} \alpha)$ oder

$$\lambda = -\frac{m r \dot{\varphi}^2 + m g \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \lambda(r(t), \dot{\varphi}(t)).$$

Eingesetzt in die rechten Seiten der Bewegungsgleichungen folgt daraus

$$\ddot{z} + g \sin^2 \alpha - r \dot{\phi}^2 \sin \alpha \cos \alpha = 0 ,$$

$$\ddot{r} - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \alpha + g \sin \alpha \cos \alpha = 0 \quad \text{und}$$

$$r \ddot{\phi} + 2 \dot{r} \dot{\phi} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\phi}) = 0 \rightarrow m r^2 \dot{\phi} = \text{const} = L_z .$$

Das bedeutet Drehimpulserhaltung wie im Kap. 2.5: ϕ taucht nicht in L auf, ist also zyklische Koordinate.

Die anderen beiden Gleichungen stimmen unter Berücksichtigung der Notation

$r_{(\text{Kap. 2.7})} = \sin \alpha r_{(\text{Kap. 2.5})}$ mit denen in Kap. 2.5 im Rahmen des Lagrange-II-Formalismus abgeleiteten Bewegungsgleichungen überein. Die weitere Vorgehensweise ist in Kap. 2.5 bereits beschrieben.

Zusätzlich erhalten wir die Komponenten der Zwangskraft

$$\underline{Z} = \begin{pmatrix} Z_r \\ Z_\phi \\ Z_z \end{pmatrix} = \lambda(\phi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\text{tg}\alpha \end{pmatrix} = \frac{m r \dot{\phi}^2 + m g \text{tg}\alpha}{1 + \text{tg}^2 \alpha} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \text{tg}\alpha \end{pmatrix} .$$

Bem.: An diesem Beispiel sehen wir, dass in Lagrange I krummlinige Koordinaten verwendet werden können, um die Symmetrie des Problems auszunutzen. Diese sind dann keine verallgemeinerten Koordinaten in dem Sinne, dass sie die Zwangbedingungen in Identitäten verwandeln. Wäre dies der Fall, könnte die Zwangskräfte nicht berechnet werden.

Außerdem liegt ein Beispiel mit $\lambda(t) = \lambda(r(t), \dot{\phi}(t))$ vor, d.h., die Zwangskraft hängt von der realisierten Bahnkurve ab. $r(t)$ oder $\dot{\phi}(t)$ kann man über $m r^2 \dot{\phi} = L_z$ eliminieren.

Es wäre sicher interessant, einige Trajektorien durch numerische Integration zu ermitteln und grafisch darzustellen, bzw. gleich ein Applet zu entwickeln.

■ Beispiel **Kettenlinie**

Auf ein klassisches Variationsproblem mit Nebenbedingung führt die Beantwortung folgender Frage: Welche Kurve $y(x)$ beschreibt die Gleichgewichtslage eines Seils/einer Kette, das/die an zwei Punkten P_1 und P_2 im Schwerfeld der Erde aufgehängt ist?

Die Gleichgewichtslage ergibt sich aus der Bedingung minimaler potenzieller Energie

$$U[y(x)] = \int_1^2 dm g y = g \rho \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{dx \sqrt{1+y'^2}}_{ds} \quad y =: \int_{x_1}^{x_2} dx f(y, y', x) \rightarrow \text{Min},$$

Skizze

wobei wir die Dichte ρ der Einfachheit halber als konstant angesehen haben. Hier steht y' für die Ableitung der Funktion y nach x und s bezeichnet die Bogenlänge. Das Minimum des Funktionals $U[y(x)]$ ist unter der Nebenbedingung konstanter Seillänge ℓ zu bestimmen, d.h.

$$\ell[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1+y'^2} = \text{const.}$$

Im Sinne der Methode der Lagrange-Multiplikatoren haben wir anstelle der "Lagrange-Funktion" $f(y, y', x)$ zur Berücksichtigung der Nebenbedingung das Funktional

$$\tilde{f}(y, y', x) = \sqrt{1+y'^2} (y - \lambda)$$

zu betrachten (der konstante Faktor ρg ist unerheblich für die "Bewegungsgleichung"). Da \tilde{f} die unabhängige Variable x (die "Zeit") nicht enthält, besitzen die dazugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen ein erstes Integral, die "Energie"

$$\text{const} = \tilde{f} - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y'} y' = \sqrt{1+y'^2} (y - \lambda) - (y - \lambda) \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = (y - \lambda) \left(\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} \right).$$

Also ist

$$\frac{y - \lambda}{\sqrt{1+y'^2}} =: A = \text{const} \quad \text{oder} \quad y'^2 = \frac{(y - \lambda)^2}{A^2} - 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{dy}{\sqrt{\frac{(y - \lambda)^2}{A^2} - 1}} = dx.$$

Mit der Substitution $\cosh z = \frac{y-\lambda}{A}$, d.h. $dy = A \sinh z dz$ folgt unter Ausnutzung von $\cosh^2 z - 1 = \sinh^2 z$ sofort $\frac{A \sinh z dz}{\sinh z} = dx$, also $Az = x + B'$ oder $z = \frac{x}{A} + B$. Daraus ergibt sich nach Rücktransformation über $z = \cosh\left(\frac{x}{A} + B\right) = \frac{y-\lambda}{A}$ letztendlich die gesuchte Funktion

$$y(x) = A \cosh\left(\frac{x}{A} + B\right) + \lambda.$$

Der Lagrange-Parameter λ und die Integrationskonstanten A und B werden aus den Rand- und der Nebenbedingung bestimmt.

Wählen wir z.B. als Aufhängepunkte der Kette $P_1 = (x_1, y_1) = (-1, 0)$ und $P_2 = (x_2, y_2) = (1, 0)$, so ergeben sich die beiden Bedingungen

$$0 = A \cosh\left(-\frac{1}{A} + B\right) + \lambda \quad \text{und} \quad 0 = A \cosh\left(\frac{1}{A} + B\right) + \lambda,$$

Skizze

also $B = 0$ (denn $\cosh x$ ist eine gerade Funktion), d.h., $-A \cosh \frac{1}{A} = \lambda$, und somit

$$y(x) = A \cosh \frac{x}{A} - A \cosh \frac{1}{A}.$$

Für die noch unbekanntene Konstante A folgt aus der Nebenbedingung unter Verwendung von

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sinh \frac{x}{A}, \quad \sqrt{1 + y'^2} = \cosh \frac{x}{A}$$

$$\ell[y(x)] = \int_{-1}^1 dx \sqrt{1 + y'^2} = A \sinh \frac{1}{A} \Big|_{-1}^1 = A \left[\sinh\left(\frac{1}{A}\right) - \sinh\left(-\frac{1}{A}\right) \right],$$

also die transzendente Gleichung $2 A \sinh \frac{1}{A} = \ell$ zur Bestimmung von A bei gegebener

Seillänge ℓ .

Beachte: Wegen der Existenz des ersten Integrals war es nicht erforderlich, die Euler-

Lagrange-Gleichung $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y'} \right) - \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \right) = 0$ zu lösen.

- **Reibungskräften, Rayleigh'sche Dissipationsfunktion**

Bisher haben wir keine Reibungskräfte im Lagrange-Formalismus berücksichtigt.

Um dies zu tun, gehen wir nun zurück zu Kap. 1.4.9, in dem wir die Newton'sche Bewegungsgleichung in krummlinigen Koordinaten geschrieben haben

$$m \ddot{\underline{r}} = \underline{F} \quad \xrightarrow{\underline{r} = \underline{r}(\underline{q}), \dot{\underline{r}} = \sum_{k=1}^f \frac{\partial \underline{r}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k, \ddot{\underline{r}} = \dots} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \right) = 0, \quad k = 1, \dots, f = 3N - R \quad .$$

$$\underline{r} = (r_1, \dots, r_{3N}) \quad \underline{q} = (q_1, \dots, q_f)$$

Nach einigen Umformungen waren wir bei

$$\underline{F} \cdot \underline{e}_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_k} \right) \quad (\text{H5}) \quad \text{mit} \quad \underline{e}_k(\underline{q}) := \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_k}$$

angelangt und hatten die linke Seite unter der Annahme, die Kraft \underline{F} sei konservativ, weiter vereinfacht.

Nun werden wir wie im Kapitel (1.4.8) bei der Diskussion zum Energieerhaltungssatz für Massepunktsysteme die Kraft \underline{F} in einen konservativen und einen dissipativen Anteil zerlegen

$$\underline{F} \cdot \underline{e}_k = \underline{F}^{(K)} \cdot \underline{e}_k + \underline{F}^{(D)} \cdot \underline{e}_k .$$

Den konservativen Anteil formen wir wie gehabt um

$$\underline{F}^{(K)} \cdot \underline{e}_k = - \frac{\partial U}{\partial \underline{r}} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_k} = - \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial U}{\partial r_i} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = - \frac{\partial U(\underline{q}, t)}{\partial q_k} .$$

Für die Komponenten des dissipativen Anteils der Kraft machen wir den (stark vereinfachenden!) Ansatz

$$\underline{F}_i^{(D)} = -\gamma_i \dot{r}_i .$$

Das bedeutet Reibungskräfte proportional zur Geschwindigkeit, γ_i sind die (konstanten) Reibungskoeffizienten. Für diesen Fall definieren wir

$$D(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\gamma_i}{2} [\dot{r}_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)]^2 \quad \rightarrow \text{Rayleigh'sche Dissipationsfunktion}$$

Dann folgt

$$\underline{F}^{(D)} \cdot \underline{e}_k = \sum_{i=1}^{3N} F_i^{(D)} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = - \sum_{i=1}^{3N} \gamma_i \dot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = - \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial D}{\partial \dot{r}_i} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = - \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial D}{\partial \dot{r}_i} \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_k} = - \frac{\partial D(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)}{\partial \dot{q}_k}.$$

Im Zusammenhang mit der Umformung $\dot{r}_i = \dot{r}_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$ ist zu beachten: $r_i = r_i(\underline{q}, t)$ impliziert

$$\frac{dr_i}{dt} \equiv \dot{r}_i = \frac{\partial r_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^f \frac{\partial r_i(\underline{q}, t)}{\partial q_k} \dot{q}_k =: \dot{r}_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t). \text{ Diese Beziehung definiert } \dot{r}_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) \text{ als Funktion}$$

von \underline{q} , $\underline{\dot{q}}$ und t , für die offensichtlich Funktionen $\frac{\partial \dot{r}_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial r_i(\underline{q}, t)}{\partial q_k}$ gilt.

Damit lauten die Lagrange-Gleichungen II. Art im Fall linear von der Geschwindigkeit abhängender Reibungskräfte

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = 0, \quad k = 1, \dots, f.$$
