

## Zusammenfassung Hamilton-Jakobi-Formalismus

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{p}(t), \underline{q}(t) & & \underline{P}(t), \underline{Q}(t) \\
 & \xrightarrow{\text{kanonische Transformation}} & \\
 \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} & & \dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i}, \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i}
 \end{array}$$

Erzeugende Funktion:  $G(\underline{q}, \underline{P}, t)$  (über Legendre-Transformation aus  $F(\underline{q}, \underline{Q}, t)$ )

$$\text{mit } p_i = \frac{\partial G}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial G}{\partial P_i}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial G}{\partial t}, \quad \text{wegen } dG = \sum_{i=1}^f (p_i dq_i + Q_i dP_i) + (\tilde{H} - H) dt.$$

Dabei ist  $f$  wieder die Anzahl der Freiheitsgrade des mechanischen Systems.

Forderung:  $\overset{!}{\tilde{H}(\underline{P}, \underline{Q}, t)} \equiv 0$ . Dann ist  $\dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i} = 0$ ,  $\dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i} = 0$ , d.h. alle neuen

verallgemeinerten Koordinaten  $Q_i$  und Impulse  $P_i$  sind zeitunabhängige Konstanten

(Integrale der Bewegung):  $P_i = \text{const} =: \alpha_i$ ,  $Q_i = \text{const} =: \beta_i$ .

Zusätzlich haben wir festgestellt, dass die erzeugende Funktion  $G(\underline{q}, \underline{P}, t)$  entlang der gesuchten Bahnkurve mit der Wirkung  $S$  zusammenfällt. Damit ergibt sich aus

$$0 = \overset{!}{\tilde{H}(\underline{P}, \underline{Q}, t)} = H(\underline{p}, \underline{q}, t) + \frac{\partial G(\underline{q}, \underline{P}, t)}{\partial t} \rightarrow \underline{H\left(\underline{q}, \frac{\partial S(\underline{q}, \underline{\alpha}, t)}{\partial \underline{q}}, t\right) + \frac{\partial S(\underline{q}, \underline{\alpha}, t)}{\partial t} = 0.}$$

Wir benötigen das vollständige Integral  $S(\underline{q}, \underline{\alpha}, t)$  dieser partiellen Differentialgleichung, das  $f$  beliebige Konstanten  $\alpha_i$  enthalten muss. Daraus bestimmen wir die Bahnkurve (im  $\Gamma$ -Raum):

$$\text{Aus } \frac{\partial S(\underline{q}, \underline{\alpha}, t)}{\partial \alpha_i} = Q_i = \text{const} = \beta_i \text{ folgt } \underline{q} = \underline{q}(t; \underline{\alpha}, \underline{\beta}).$$

$$\text{Aus } \frac{\partial S(\underline{q}, \underline{\alpha}, t)}{\partial q_i} = p_i = \text{const} = \alpha_i \text{ werden dann unter Verwendung von } \underline{q} = \underline{q}(t; \underline{\alpha}, \underline{\beta})$$

die Impulse  $\underline{p} = \underline{p}(t; \underline{\alpha}, \underline{\beta})$  berechnet. Die  $2f$  unbestimmten Konstanten  $\alpha_i, \beta_i$  ermitteln wir aus den Anfangsbedingungen.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich folgendes

- **"Rezept" zur Berechnung der Bahnkurve aus der Hamilton-Jacobi-Gleichung,** das am Beispiel ■ des harmonischen Oszillators illustriert werden soll.

1. Schritt: Hamilton-Funktion  $H(\underline{p}, \underline{q}, t)$  des betrachteten mechanischen Systems bestimmen

■  $H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2$ ,  $q$  - Auslenkung aus Ruhelage,  $m$  - Masse,  $k$  - Federkonstante,  $f = 1$ .

2. Schritt: Hamilton-Jacobi-Gleichung  $H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$  aufstellen

■  $\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \frac{k}{2}q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$

und ihr vollständiges Integral  $S(\underline{q}, \underline{\alpha}, t)$  mit  $f$  unbestimmten Konstanten  $\underline{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_f\}$  bestimmen.

■ Im Fall des harmonischen Oszillators ist  $H$  nicht explizit zeitabhängig ("t zyklisch"), deshalb machen wir den Separationsansatz  $S(q, t) = W(q) + V(t)$ . Es folgt

$$\underbrace{\frac{1}{2m} \left( \frac{dW}{dq} \right)^2 + \frac{k}{2}q^2}_{\text{nur } q\text{-abhängig}} = \underbrace{-\frac{dV}{dt}}_{\text{nur } t\text{-abh.}} = \text{const} =: \alpha \quad (= E)$$

also

$$V(t) = -\alpha t + \text{const}' \quad \text{und} \quad \frac{1}{2m} \left( \frac{dW}{dq} \right)^2 = \alpha - \frac{k}{2}q^2 \geq 0, \text{ d.h. } W(q, \alpha) = \sqrt{2m} \int dq \sqrt{\alpha - kq^2/2}.$$

Somit lautet das allgemeine Integral ( $f = 1, \alpha_1 := \alpha$ )  $S(q, \alpha, t) = \sqrt{2m} \int dq \sqrt{\alpha - kq^2/2} - \alpha t$ .

3. Schritt: Setze  $\frac{\partial S(\underline{q}, \underline{\alpha}, t)}{\partial \alpha_i} = \beta_i$  mit  $f$  weiteren unbestimmten Konstanten  $\beta_i$  und löse nach

$q_i$  auf um  $q_i(t; \underline{\alpha}, \underline{\beta})$  zu erhalten.

■ Aus  $\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \beta$  folgt  $\beta + t = S(q, \alpha, t) = \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2\alpha}} q\right),$

d.h. wie erwartet die harmonische Schwingung

$$q(t; \alpha, \beta) = \sqrt{\frac{2\alpha}{k}} \sin[\omega(\beta + t)]$$

mit der Amplitude  $\sqrt{\frac{2\alpha}{k}}$ , der Phase  $\omega\beta$  und der Kreisfrequenz  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ .

4. Schritt: Berechne die Zeitabhängigkeit der Impulse  $p_i(t; \alpha, \beta)$  aus  $p_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_i}$  unter

Verwendung von  $q_i(t; \alpha, \beta)$  aus Schritt 3.

■

$$p(t; \alpha, \beta) = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q} = \sqrt{2m} \sqrt{\alpha - kq^2/2} = \sqrt{2m} \sqrt{\alpha - \frac{k}{2} \frac{2\alpha}{k} \sin^2[\omega(\beta + t)]} = \sqrt{2m\alpha} \cos[\omega(\beta + t)]$$

5. Schritt: Bestimme die 2f Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  aus den Anfangsbedingungen

■ Für die Anfangsbedingungen  $q(t=0) = A$  und  $p(t=0) = 0$  ergibt sich beispielsweise

$$0 = p(t=0) = \sqrt{2m\alpha} \cos(\omega\beta) \rightarrow \omega\beta = \frac{\pi}{2} \pm n\pi$$

$$A = q(t=0) = \sqrt{\frac{2\alpha}{k}} \underbrace{\sin(\omega\beta)}_1 \rightarrow \frac{kA^2}{2} = \alpha = E$$

Dass  $\alpha$  die Schwingungsenergie ist, war bereits beim Separationsansatz unter Punkt 2. zu erkennen. Insgesamt haben wir

$$q(t) = A \sin(\omega t + \pi/2) = A \cos \omega t, \quad p(t) = \sqrt{2m \frac{kA^2}{2}} \cos(\omega t + \pi/2) = -m A \omega \sin \omega t \quad \overset{\substack{\uparrow \\ \text{nur in die-} \\ \text{sem Fall}}}{=} m \frac{dq}{dt}$$

**Einschub:** Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung durch Separation der Variablen ( $L^2$ , § 48)

**A:** Hängt die Hamilton-Funktion nicht explizit von der Zeit ab, führt der Separationsansatz

$$\underline{S(\underline{q}, \underline{\alpha}, t) = S_0(\underline{q}, \underline{\alpha}) - Et} \quad \text{auf die Gleichung} \quad \underline{H\left(\underline{q}, \frac{\partial S_0}{\partial \underline{q}}, \underline{\alpha}\right) = E} .$$

**B:** Eine zyklische Variable, z.B.  $q_1$ , geht nicht in die Hamilton-Funktion, also auch nicht in die HJG ein. Sie wird über den Ansatz  $S(\underline{q}, \underline{\alpha}, t) = S_0(q_2, q_3, \dots, q_f, \underline{\alpha}) + \alpha_1 q_1$  absepariert. Im konservativen Fall genügt  $S_0$  der reduzierten Gleichung ( $f - 1$  Freiheitsgrade)

$$H\left(q_2, q_3, \dots, q_f, \alpha_1, \frac{\partial S_0}{\partial q_2}, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_f}\right) = E$$

und  $\alpha_1$  ist der konstante Wert des zu  $q_1$  kanonisch konjugierten Impulses  $p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1}$  ( $L^2$ , § 48).

**C:** In einigen krummlinigen Koordinatensystemen (u.a. in sphärischen, parabolischen und elliptischen Koordinaten) ist die Separation der Variablen möglich.

■ Beispiel: Bewegung eines Massepunkts im Feld  $U(r, \theta, \varphi) = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} + \frac{c(\varphi)}{r^2 \sin^2 \theta}$  mit

beliebigen Funktionen  $a(r)$ ,  $b(\theta)$  und  $c(\varphi)$  ist vollständig separierbar. Wir wissen, dass die Hamilton-Funktion eines sich im Feld  $U(r, \theta, \varphi)$  bewegenden Massepunkts bei Verwendung sphärischer Koordinaten

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r, \theta, \varphi)$$

lautet. Im Fall  $c(\varphi) = 0$  führt der Separationsansatz  $S_0 = p_\varphi \varphi + S_1(r) + S_2(\theta)$  nach einfacher Rechnung auf

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + \int dr \sqrt{2m[E - a(r)] - \frac{\beta}{r^2}} + \int d\theta \sqrt{\beta - 2m b(\theta) - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta}}$$

mit den freien Konstanten  $p_\varphi$ ,  $\beta$  und  $E$ . Die Ableitungen von  $S$  nach diesen Konstanten werden neuen Konstanten gleichgesetzt und so die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen ermittelt.

Insgesamt stellt die Hamilton-Jacobische Methode "das mächtigste Instrument zur Auffindung der allgemeinen Lösung der Bewegungsgleichungen" dar ( $L^2$ , Bd. I, S. 185).

Auf dem aktuellen Übungsblatt wird die Methode auf die Lösung der Bewegung im Zentralfeld (Zwei-Körperproblem, Inertialsystem im Schwerpunkt) angewendet.

Die Korrespondenz zwischen Klassischer Mechanik und Quantenmechanik im Lichte der Hamilton-Jakobi-Theorie werden wir im folgenden Semester behandeln.

#### 4. Raum-Zeit-Symmetrie und Erhaltungssätze. Noether-Theorem

Behauptung: Jede Invarianz der Lagrange-Funktion eines physikalischen Systems

$$L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) \xrightarrow[\substack{q_i \rightarrow \tilde{q}_i = q_i + \varepsilon \psi_i((\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) + O(\varepsilon^2)) \\ t \rightarrow \tilde{t} = t + \varepsilon \varphi(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) + O(\varepsilon^2)}}{\tilde{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = L(\underline{\tilde{q}}, \underline{\tilde{\dot{q}}}, t)} \quad (\text{H})$$

gegenüber einer infinitesimalen Transformation der Koordinaten und/oder der Zeit

$$q_i \rightarrow \tilde{q}_i = q_i + \varepsilon \psi_i((\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) + O(\varepsilon^2)), \quad t \rightarrow \tilde{t} = t + \varepsilon \varphi(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) + O(\varepsilon^2)$$

ist mit einem Erhaltungssatz bzw. einem Integral der Bewegung  $Q(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = \text{const}$  für das betrachtete physikalische System verknüpft.

Symmetrie von Raum, Zeit / Invarianz  $L = \tilde{L} \Leftrightarrow$  Erhaltungssatz/Integral der Bewegung.

Bevor wir das Integral der Bewegung  $Q(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = \text{const}$  aus den Transformationsformeln  $\psi_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$  und  $\varphi(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$  explizit berechnen, betrachten wir einige einfache Beispiele für Symmetrietransformationen.

Bei der Überprüfung der Relation  $L = \tilde{L}$  legen wir ein System aus  $N$  Massepunkten mit der Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} L(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_N, \underline{\dot{r}}_1, \underline{\dot{r}}_2, \dots, \underline{\dot{r}}_N, t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\underline{r}}_i^2 - U(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_N, t) = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\underline{r}}_i^2}_{\text{kinetische Energie}} - \underbrace{\sum_{\substack{\alpha=1 \\ i=1}}^{s, N} U_\alpha(\underline{r}_i, t)}_{\text{s äußere Felder}} - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^N U_{ik}(|\underline{r}_i - \underline{r}_k|)}_{\text{Paar-Wechselwirkung mit abstandsabhängigem Potenzial}} \end{aligned} \quad (1)$$

zugrunde. Neben der kinetischen Energie werden  $s$  äußere Felder  $U_\alpha$  berücksichtigt; die Wechselwirkung zwischen den Massepunkten ist auf Paarwechselwirkungen mit abstandsabhängigem Potenzial  $U_{ik}$  beschränkt, was  $\underline{F}_{ik} = -\underline{F}_{ki}$  sichert (vgl. Kap. 1.4.8).

**A:** Zunächst untersuchen wir, welchem Erhaltungssatz die Invarianz der Lagrange-Funktion gegenüber einer infinitesimalen Verschiebung aller Massepunkte um einen infinitesimal kleinen, konstanten Vektor  $\underline{d\mathbf{a}}$ , also einer Verschiebung des Koordinatenursprungs um  $\underline{d\mathbf{a}}$  entspricht. Die Transformationsformeln lauten in diesem Falle

$$\underline{\mathbf{r}}_i \rightarrow \tilde{\underline{\mathbf{r}}}_i = \underline{\mathbf{r}}_i + \underline{d\mathbf{a}}, \quad \dot{\underline{\mathbf{r}}}_i \rightarrow \dot{\tilde{\underline{\mathbf{r}}}}_i = \dot{\underline{\mathbf{r}}}_i, \quad t \rightarrow \tilde{t} = t. \quad (\text{H1})$$

Angenommen, die Lagrange-Funktion  $L$  ist invariant unter (H1),  $L = \overset{(\text{H1})}{\tilde{L}}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 = \tilde{L} - L &= L(\underline{\mathbf{r}}_i + \underline{d\mathbf{a}}, \dot{\underline{\mathbf{r}}}_i, t) - L(\underline{\mathbf{r}}_i, \dot{\underline{\mathbf{r}}}_i, t) = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \underline{\mathbf{r}}_i} \cdot \underline{d\mathbf{a}} + O((\underline{d\mathbf{a}})^2) \stackrel{\text{LII}}{=} \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{\mathbf{r}}}_i} \right) \cdot \underline{d\mathbf{a}} + O((\underline{d\mathbf{a}})^2) = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \underline{\mathbf{p}}_i \cdot \underline{d\mathbf{a}} + O((\underline{d\mathbf{a}})^2), \end{aligned}$$

wobei  $\underline{\mathbf{p}}_i$  der Impuls des  $i$ -ten MP ist. Weil  $\underline{d\mathbf{a}}$  klein aber beliebig ist, muss für  $L = \tilde{L}$

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \underline{\mathbf{p}}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \underline{\mathbf{p}}_i = \frac{d\underline{\mathbf{P}}}{dt} = 0 \quad \text{also} \quad \underline{\mathbf{P}} = \text{const}$$

gelten.

**Fazit:** Ist die Lagrange-Funktion eines physikalischen Systems invariant unter der Transformation (H1), d.h., alle Punkte des Raumes sind äquivalent (und könnten als Ursprung des Koordinatensystems dienen), dann bleibt der Gesamtimpuls des betrachteten Systems erhalten:

**Homogenität des Raumes**  $\Leftrightarrow$  **Impulserhaltung**

■ Im Fall des Massepunktsystems (1) ist  $L = \tilde{L}$  wegen  $\tilde{\underline{\mathbf{r}}}_i - \tilde{\underline{\mathbf{r}}}_k = \underline{\mathbf{r}}_i - \underline{\mathbf{r}}_k$  und  $\dot{\tilde{\underline{\mathbf{r}}}}_i = \dot{\underline{\mathbf{r}}}_i$  offensichtlich nur dann erfüllt, wenn es keine äußeren Felder  $U_\alpha$  gibt. Diese vereiteln wegen  $U_\alpha(\underline{\mathbf{r}}_i + \underline{d\mathbf{a}}, t) = U_\alpha(\underline{\mathbf{r}}_i, t) + \underline{\nabla} U_\alpha \cdot \underline{d\mathbf{a}} + O((\underline{d\mathbf{a}})^2) \neq U_\alpha(\underline{\mathbf{r}}_i, t)$  die Invarianz von  $L$  unter (H1),

solange  $\sum_{\alpha=1}^s \underline{\mathbf{F}}_\alpha(\underline{\mathbf{r}}_i) = -\sum_{\alpha=1}^s \underline{\nabla} U_\alpha(\underline{\mathbf{r}}_i) \neq 0$ .

Das bedeutet: Ist die resultierende äußere Kraft auf das Massepunktssystem (1) gleich Null (weil es, z.B., von äußeren Felder unbeeinflusst ist), bleibt der Gesamtimpuls erhalten und der Schwerpunkt bewegt sich geradlinig gleichförmig, wie in Kap. 1.4.8 bereits bewiesen (dort allerdings, ohne sich auf die Homogenität des Raumes in diesem Fall zu beziehen).

**B:** Welcher Erhaltungssatz entspricht der Invarianz der Lagrange-Funktion eines physikalischen Systems gegenüber der Transformation

$$\underline{r}_i \rightarrow \tilde{\underline{r}}_i = \underline{r}_i, \quad \dot{\underline{r}}_i \rightarrow \dot{\tilde{\underline{r}}}_i = \dot{\underline{r}}_i, \quad t \rightarrow \tilde{t} = t + dt, \quad (\text{H2})$$

also der Verschiebung des Zeitanfangs um  $dt$ ?

Wenn  $L = \tilde{L}$ , dann ist  $\tilde{L} - L = L(\dots, t + dt) - L(\dots, t) = \frac{\partial L}{\partial t} dt + O((dt)^2) = 0$ , also  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ .

Wegen  $\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{dH}{dt}$  (vgl. Kap. 2.4, Sonderfall Energieerhaltung) impliziert  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

$H = \text{const.}$

**Fazit:** Wenn die Lagrange-Funktion invariant unter der Transformation (H2) ist, wenn also alle Zeitmomente äquivalent sind, dann bleibt die Energie des betrachteten Systems erhalten:

**Homogenität der Zeit**

$\Leftrightarrow$

**Energieerhaltung**

■ Im Fall des Massepunktssystems mit der Lagrange-Funktion (1) ist  $L = \tilde{L}$  bzw.

$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$  nur dann erfüllt, wenn die potenzielle Energie nicht explizit zeitabhängig

ist:  $U(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_N)$ ; im Fall (1) müssen die äußeren Felder zeitlich konstant sein.

Noch einmal ausführlich:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial L}{\partial \underline{r}_i} \dot{\underline{r}}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i} \ddot{\underline{r}}_i \right) + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_0 = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i} \right) \dot{\underline{r}}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i} \ddot{\underline{r}}_i \right] = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i} \dot{\underline{r}}_i \right).$$

Damit ist



$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \dot{\mathbf{r}}_i - L \right) = 0, \text{ also } \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \dot{\mathbf{r}}_i - L = \text{const}, \text{ wenn } \frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Für das MPS haben wir

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = m_i \dot{\mathbf{r}}_i, \quad \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = 2T, \text{ also } \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \dot{\mathbf{r}}_i - L = 2T - (T - U) = T + U = E = \text{const}.$$

**C:** Welcher Erhaltungssatz entspricht der Invarianz der Lagrange-Funktion eines physikalischen Systems gegenüber einer infinitesimalen Drehung des Koordinatensystems um einen beliebigen konstanten Winkel  $d\varphi$ , also der Transformation

$$\underline{\mathbf{r}}_i \rightarrow \tilde{\mathbf{r}}_i = \underline{\mathbf{r}}_i + d\varphi \times \underline{\mathbf{r}}_i, \quad \dot{\mathbf{r}}_i \rightarrow \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_i = \dot{\mathbf{r}}_i + d\varphi \times \dot{\mathbf{r}}_i, \quad t \rightarrow \tilde{t} = t? \quad (\text{H3})$$

Wir wissen: Bei Drehung um den Winkel  $d\varphi$  gilt  $d\underline{\mathbf{r}}_i = d\varphi \times \underline{\mathbf{r}}_i$  (da, erstens,

$|d\underline{\mathbf{r}}_i| = d\mathbf{r}_i = r_i \sin \vartheta d\varphi$  und, zweitens,  $d\underline{\mathbf{r}}_i$  senkrecht auf der durch  $\underline{\mathbf{r}}_i$  und  $d\varphi$  aufgespannten Ebene steht, Skizze anfertigen).

Bleibt  $L$  invariant unter der Transformation (H3), dann ist

$$\begin{aligned} 0 = \tilde{L} - L &= L(\underline{\mathbf{r}}_i + d\varphi \times \underline{\mathbf{r}}_i, \dot{\mathbf{r}}_i + d\varphi \times \dot{\mathbf{r}}_i, t) - L(\underline{\mathbf{r}}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, t) = \\ &= \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial L}{\partial \underline{\mathbf{r}}_i} \cdot (d\varphi \times \underline{\mathbf{r}}_i) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot (d\varphi \times \dot{\mathbf{r}}_i) \right] + O((d\varphi)^2) \stackrel{\text{zyklische Vertausch.}}{\cong} d\varphi \cdot \sum_{i=1}^N \left( \underline{\mathbf{r}}_i \times \frac{\partial L}{\partial \underline{\mathbf{r}}_i} + \dot{\mathbf{r}}_i \times \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) = \\ &= d\varphi \cdot \sum_{i=1}^N \left[ \underline{\mathbf{r}}_i \times \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) + \dot{\mathbf{r}}_i \times \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right] = d\varphi \cdot \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N \underline{\mathbf{r}}_i \times \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) = d\varphi \cdot \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N \underline{\mathbf{r}}_i \times \underline{\mathbf{p}}_i \right) = d\varphi \cdot \frac{d\underline{\mathbf{L}}}{dt}. \end{aligned}$$

Für beliebige  $d\varphi$  kann  $\tilde{L} = L$  nur gelten, wenn der Gesamtdrehimpuls konstant ist

$$\underline{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^N \underline{\mathbf{r}}_i \times \underline{\mathbf{p}}_i = \text{const}$$

(Lagrange-Funktion  $L$  und Gesamtdrehimpuls  $\underline{L}$  nicht verwechseln !)

**Fazit:** Erweist sich die Lagrange-Funktion als invariant unter der Transformation (H3), d.h., gegenüber der Drehung des Koordinatensystems um eine beliebige Achse, so bleibt der Gesamtdrehimpuls  $\underline{L}$  des durch die Lagrange-Funktion  $L$  beschriebenen physikalischen Systems erhalten:

**Isotropie des Raumes**  $\Leftrightarrow$  **Drehimpulserhaltung**

Bem.: Gilt  $\tilde{L} = L$  bei Drehung um eine bestimmte Achse (z.B.  $\underline{d\varphi}$  in z-Richtung), so bleibt die Projektion des Gesamtdrehimpulses auf diese bestimmte Richtung (also  $L_z$ ) erhalten

■ Im von uns betrachteten Beispiel (1)  $N$  wechselwirkender Massepunkte ist die Invarianzbedingung  $L = \tilde{L}$  erfüllt, wenn keine äußeren Felder vorhanden sind. Beweis:

$$\begin{aligned} (\tilde{\underline{r}}_i - \tilde{\underline{r}}_k)^2 &= (\underline{r}_i + \underline{d\varphi} \times \underline{r}_i - \underline{r}_k + \underline{d\varphi} \times \underline{r}_k)^2 = \left[ (\underline{r}_i - \underline{r}_k) + \underline{d\varphi} \times (\underline{r}_i - \underline{r}_k) \right]^2 = \\ &= (\underline{r}_i - \underline{r}_k)^2 + 2 (\underline{r}_i - \underline{r}_k) \cdot \underline{d\varphi} \times (\underline{r}_i - \underline{r}_k) + O((d\varphi)^2) \end{aligned}$$

• **Verallgemeinerung: Theorem von Emmy Noether**

Emmy Noether zu Ehren hat die DFG das Emmy Noether Programm zur Förderung von Nachwuchs-wissenschaftlern im Anschluss an die Promotion aufgelegt.

Jede einparametrische infinitesimale ( $\varepsilon \ll 1$ ) kontinuierliche Transformation (H) der Koordinaten und der Zeit

$$L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) \xrightarrow[\substack{t \rightarrow \tilde{t} = t + \varepsilon \varphi(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) + O(\varepsilon^2)}]{\substack{q_i \rightarrow \tilde{q}_i = q_i + \varepsilon \psi_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) + O(\varepsilon^2)}} \tilde{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = L(\underline{\tilde{q}}, \underline{\tilde{\dot{q}}}, t), \quad (\text{H})$$

die die Wirkung invariant lässt, bedeutet die Existenz des Integrals der Bewegung

$$Q(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) = \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \psi_i + \left( L - \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \varphi - F(\underline{q}, t) = \text{const.} \quad (\text{H4})$$

Beweis: Wir entwickeln  $\tilde{S}$  unter Berücksichtigung von  $d\tilde{t} = \frac{d\tilde{t}}{dt} \cdot dt$  in eine Taylor-Reihe nach Potenzen von  $\varepsilon$

$$\tilde{S} = \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} d\tilde{t} L\left(\tilde{\underline{q}}, \frac{d\tilde{\underline{q}}}{d\tilde{t}}, \tilde{t}\right) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ L\left(\underline{q}, \frac{dq}{dt}, t\right) + \frac{d}{d\varepsilon} \left[ L\left(\tilde{\underline{q}}, \frac{d\tilde{\underline{q}}}{d\tilde{t}}, \tilde{t}\right) \frac{d\tilde{t}}{dt} \right] \Big|_{\varepsilon=0} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \right\}. \quad (\text{H5})$$

Die Beiträge aus der Differentiation nach der oberen und der unteren,  $\varepsilon$ -abhängigen

$$\text{Integrationsgrenze ergeben die Konstante } L\left(\tilde{\underline{q}}, \frac{d\tilde{\underline{q}}}{d\tilde{t}}, \tilde{t}\right) \Big|_{\tilde{t}=\tilde{t}_2} - L\left(\tilde{\underline{q}}, \frac{d\tilde{\underline{q}}}{d\tilde{t}}, \tilde{t}\right) \Big|_{\tilde{t}=\tilde{t}_1}.$$

Der erste Term auf der rechten Seite der Gleichung (H5) ist die Wirkung  $S$ . Unterscheiden sich die zu  $\tilde{S}$  und  $S$  gehörenden Lagrange-Funktionen lediglich um Terme, die als vollständige Ableitung einer Funktion  $F(\underline{q}, t)$  der verallgemeinerten Koordinaten und der Zeit darstellbar sind, dann gilt  $\delta\tilde{S} = \delta S$ . Also sind die Bewegungsgleichungen invariant unter der Transformation (H), wenn

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[ L\left(\tilde{\underline{q}}, \frac{d\tilde{\underline{q}}}{d\tilde{t}}, \tilde{t}\right) \frac{d\tilde{t}}{dt} \right] \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{dF(\underline{q}, t)}{dt} \quad \rightarrow \quad \text{Invarianzbedingung.} \quad (\text{H6})$$

Ableitung der expliziten Form (H4) des Bewegungsintegrals: Wegen

$$\frac{d\tilde{t}}{dt} = 1 + \varepsilon \frac{d\varphi}{dt} + O(\varepsilon^2)$$

$$\frac{d\tilde{q}_i}{d\tilde{t}} = \frac{d\tilde{q}_i}{dt} \frac{dt}{d\tilde{t}} = \left( \dot{q}_i + \varepsilon \frac{d\psi_i}{dt} \right) \frac{1}{1 + \varepsilon \frac{d\varphi}{dt}} + O(\varepsilon^2) = \left( \dot{q}_i + \varepsilon \frac{d\psi_i}{dt} \right) \left( 1 - \varepsilon \frac{d\varphi}{dt} \right) + O(\varepsilon^2) \cong \dot{q}_i + \varepsilon \frac{d\psi_i}{dt} - \varepsilon \dot{q}_i \frac{d\varphi}{dt}$$

ergibt die Auswertung der Invarianzbedingung

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} \left[ L \left( \underline{q}_i + \varepsilon \psi_i, \dot{\underline{q}}_i + \varepsilon \frac{d\psi_i}{dt} - \varepsilon \dot{\underline{q}}_i \frac{d\varphi}{dt}, t + \varepsilon \varphi \right) \left( 1 + \varepsilon \frac{d\varphi}{dt} \right) \right]_{\varepsilon=0} =$$

$$= \sum_{i=1}^f \left[ \frac{\partial L}{\partial \underline{q}_i} \psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{q}}_i} \left( \frac{d\psi_i}{dt} - \dot{\underline{q}}_i \frac{d\varphi}{dt} \right) \right] + \frac{\partial L}{\partial t} \varphi + L \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{q}}_i} \psi_i + \left( L - \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{q}}_i} \dot{\underline{q}}_i \right) \varphi \right] = 0.$$

Bei der letzten Umformung ( $\dot{\phantom{x}}$ ) haben wir die Lagrange-Gleichungen II. Art  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{q}}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial \underline{q}_i}$

verwendet, um die beiden mit  $\dots$  markierten Terme zu  $\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{q}}_i} \psi_i \right)$  zusammenzufassen.

Mit Hilfe der Relation  $\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} \left( L - \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{q}}_i} \dot{\underline{q}}_i \right)$  ergeben die drei mit  $***$  markierten

Terme den Ausdruck  $\frac{d}{dt} \left[ \left( L - \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{q}}_i} \dot{\underline{q}}_i \right) \varphi \right]$ .

Also muss, unter Berücksichtigung von (H6), wie behauptet

$$\sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{q}}_i} \psi_i + \left( L - \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{q}}_i} \dot{\underline{q}}_i \right) \varphi - F(\underline{q}, t) = Q(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) = \text{const} \text{ gelten.}$$

### "Rezept" zur Anwendung des Noether-Theorems:

1. Wir bestimmen die Funktionen  $\psi_i(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)$  und  $\varphi(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)$  der ins Auge gefassten

Transformation (H)

2. Überprüfe, ob die Lagrange-Funktion des betrachteten physikalischen Systems invariant gegenüber dieser Transformation ist. Dabei werden eventuell vorhandene Terme der Form

$$\frac{dF(\underline{q}, t)}{dt} \text{ in } L \text{ abgetrennt.}$$

3. Liegt Invarianz vor, lässt sich aus  $L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)$ ,  $\psi_i(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)$ ,  $\varphi(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)$  und  $F(\underline{q}, t)$  mit Hilfe von (H4) das entsprechende Integral der Bewegung  $Q(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) = \text{const}$  ausrechnen.

■ Beispiele

**A:** 1. Wir wählen die Transformation  $\psi_i = 0$  und  $\varphi = 1$ , d.h.  $\tilde{q}_i(\tilde{t}) = q_i(t + \varepsilon)$ , bzw.

$$\frac{d\tilde{t}}{dt} = 1 \text{ und } \frac{d\tilde{q}_i}{d\tilde{t}} = \frac{dq_i}{dt} .$$

2. Für Systeme, deren Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, ist die

Invarianzbedingung wegen  $\frac{d}{d\varepsilon} \left[ L \left( \tilde{\underline{q}}, \frac{d\tilde{\underline{q}}}{d\tilde{t}} \right) \frac{d\tilde{t}}{dt} \right] \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = 0$  erfüllt.

3. Also ist für diese Systeme  $Q(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = L - \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = H = \text{const} \rightarrow$  Energieerhaltung.

**B:** 1. Wir betrachten die Transformation  $\tilde{q}_k = q_k + \varepsilon \delta_{ik}$ , d.h.  $\psi_{ik} = \delta_{ik}$  und  $\tilde{t} = t$ , also  $\varphi = 0$ .

2. Für Lagrange-Funktionen mit der zyklischen Koordinate  $q_i$  tritt das Argument  $\tilde{q}_i$  nur in

Form von  $\frac{d\tilde{q}_i}{d\tilde{t}} = \frac{d(q_i + \varepsilon)}{dt} = \frac{dq_i}{dt}$  auf. Folglich hängen alle Argumente von  $\tilde{L}$  nicht von  $\varepsilon$  ab,

die Invarianzbedingung  $\frac{d}{d\varepsilon} \left[ L \left( \tilde{\underline{q}}, \frac{d\tilde{\underline{q}}}{d\tilde{t}}, \tilde{t} \right) \frac{d\tilde{t}}{dt} \right] \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = 0$  ist erfüllt.

3. Mit (H4) reduziert sich  $Q$  auf  $Q(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i = \text{const}$ , also auf das bekannte Resultat,

dass für eine zyklische Koordinate  $q_i$  der zu ihr kanonisch konjugierte Impuls  $p_i$  Integral der Bewegung ist.