Prof. Dr. Harald Engel
Jan Totz, Maria Zeitz, Manuel Katzer, Willy Knorr, Ché Netzer, Philip Knospe

8. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: Bis Di. 02.01.2017 10:00 im Briefkasten am Hintereingang des ER-Gebäudes
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden sehr ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Deckblatt von der Homepage verwenden! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Aufgabe 22 (3 Punkte): *Kanonische Transformationen*

Bestimmen Sie, ob die folgenden Transformationen kanonisch sind

(a) $P = \ln(\sin p), \quad Q = q \tan p,$

(b) $P = q, \quad Q = p,$

(c) $P = (p^2 + q^2)/2, \quad Q = \arctan(q/p)$

Aufgabe 23 (7 Punkte): *Kanonische Transformation*

(a) Berechnen Sie mit Hilfe der Erzeugenden

$$F(q, Q) = k \frac{q^2}{2 \tan Q}$$

(mit $k = const.$) die kanonischen Transformationen

$$Q = Q(q, p), \quad P = P(q, p)$$

und deren Umkehrungen $q(Q, P)$, $p(Q, P)$. Verwenden Sie die Transformationsformeln

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} \qquad\qquad P = -\frac{\partial F}{\partial Q}\,.$$

(b) Die Hamiltonfunktion sei nun

$$\tilde{H}(P, Q) = \frac{k}{m} P.$$

Stellen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen auf und lösen Sie diese.

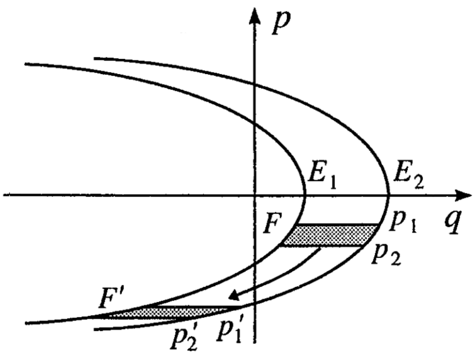
(c) Wie lautet $H(p, q)$ und wie sehen die Lösungen $q(t)$ und $p(t)$ aus? Welches physikalische System beschreibt $H(p, q)$, wenn $q = x$, $p = m\dot{x}$ und $k = m\omega$?

Bitte Rückseite beachten!⟶

8. Übung WS16/17

Aufgabe 24 (10 Punkte): *Liouvillescher Satz*

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich eindimensional im konstanten Gravitationsfeld.



(a) Zeigen Sie, dass für die Gesamtenergie E gilt:

$$H = E = \frac{p^2}{2m} + mgq.$$

(b) Die Phasenraumbahnen $q(p, E)$ sind demnach Parabeln mit der Gesamtenergie E als Parameter. Betrachten Sie nun eine Anzahl von Teilchen, deren Impulse zur Zeit $t = 0$ in den Grenzen $p_1 \leq p \leq p_2$ und deren Energien zwischen $E_1 \leq E \leq E_2$ liegen. Berechnen Sie die Fläche

$$F = \int_{p_1}^{p_2} \int_{q_1}^{q_2} \mathrm{d}q\mathrm{d}p\,,$$

die die Teilchenzustände im Phasenraum überdecken. Berechnen Sie mithilfe der Hamilton'schen Bewegungsgleichungen die Fläche F' zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$. Was stellen Sie fest?

(c) Betrachten Sie nun die kanonische Transformation, die durch die Erzeugende

$$G(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = \sum_i q_i P_i + H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)\delta t$$

gegeben ist. Hierbei ist H eine beliebige Hamilton-Funktion und δt ein infinitisemaler Zeitschritt. Berechnen Sie aus den Transformationsformeln

$$p_i = \frac{\partial G}{\partial q_i} \qquad Q_i = \frac{\partial G}{\partial P_i} \qquad \mathcal{H} = H + \frac{\partial G}{\partial t} \tag{1}$$

die transformierten Größen P_i, Q_i, $\mathcal{H}$. Was macht die gegebene Transformation mit dem System? *Hinweis:* Drücken Sie $\mathbf{p}$ in $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ als Funktion von $\mathbf{P}$ aus.

(d) Zeigen Sie nun im eindimensionalen Fall, dass kanonische Transformationen mit der allgemeinen Erzeugenden $\mathcal{F}(q, P, t)$ das Phasenraumvolumen nicht ändern, also:

$$\int \mathrm{d}\Gamma \equiv \int \mathrm{d}q\,\mathrm{d}p \stackrel{!}{=} \int \mathrm{d}Q\,\mathrm{d}P\,. \tag{2}$$

Die Variablentransformation im Mehrfachintegral lässt sich bekanntermaßen darstellen durch

$$\mathrm{d}Q\,\mathrm{d}P = D\,\mathrm{d}q\,\mathrm{d}p$$

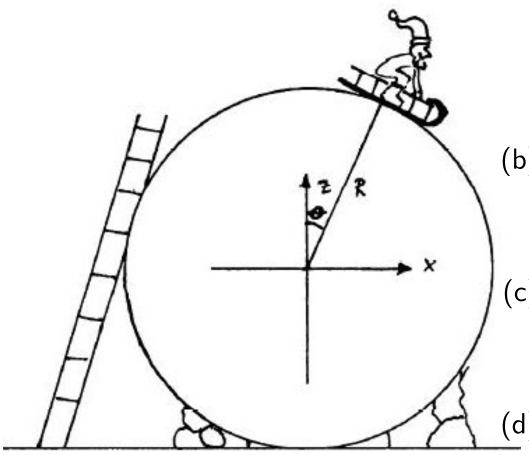
mit der Funktionaldeterminante D. Zeigen Sie, dass sich D ausdrücken lässt durch

$$D = \frac{\partial Q}{\partial q}\left[\frac{\partial p}{\partial P}\right]^{-1}.$$

Verwenden Sie nun die Transformationsformeln (1) und beweisen Sie damit (2). Das lässt sich auch für höherdimensionale Fälle zeigen (ohne Beweis). Was folgt also mit dem Ergebnis aus (c) allgemein für das Phasenraumvolumen während der zeitlichen Entwicklung eines Hamilton'schen Systems?

Prof. Dr. Harald Engel
Jan Totz, Maria Zeitz, Manuel Katzer, Willy Knorr, Ché Netzer, Philip Knospe

Bonusaufgabe 25 (4 Zusatzpunkte): *Weihnachtsmann auf Kugel (je 1 Punkt pro Teilaufgabe)*
Ein (fast) punktförmiger Weihnachtsmann der Masse m liegt in Ruhe auf dem obersten Punkt $(\theta = 0)$ einer glatten Kugel (Radius R). Durch eine infinitesimal kleine Störung beginnt er nun reibungsfrei auf der Kugeloberfläche herunterzugleiten. Es soll berechnet werden, bei welchem Winkel der Weihnachtsmann abhebt.



(a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion für eine allgemeine, freie Bewegung eines Massenpunktes im Schwerefeld $(\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z)$ in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ). Wie lautet die zu ϕ gehörige Erhaltungsgröße?

(b) Stellen Sie die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen 1. Art für die Bewegung auf der Kugeloberfläche auf. Setzen Sie $\phi =$ const. und begründe dies.

(c) Multiplizieren Sie die azimutale (zu θ-gehörige) Bewegungsgleichung mit $\dot{\theta}$ und integrieren Sie sie unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung einmal.

(d) Berechnen Sie die Zwangskraft auf die Kugel und bestimmen Sie damit, unter welchem Winkel θ_0 der Weihnachtsmann von der Kugel abhebt.

Vorlesung:	• Dienstag 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202. • Mittwoch 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202.
Webseite:	• Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der TU Webseite mit Direktzugang: 176875
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte. • Bestandene Klausur.

Bemerkung: Bei den Übungsaufgaben werden nur Originalabgaben akzeptiert. Keine Kopien oder elektronischen Abgaben. Bei Programmieraufgaben ist verwendeter Code ausgedruckt mit abzugeben.