Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 20.10.2016

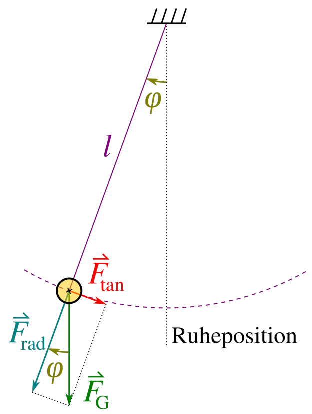
Prof. Dr. Harald Engel
Jan Totz, Maria Zeitz, Manuel Katzer, Willy Knorr, Ché Netzer, Philip Knospe

2. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: Bis Mo. 07.11.2016 10:00 im Briefkasten am Hintereingang des ER-Gebäudes
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Deckblatt von der Homepage verwenden! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Aufgabe 3 (12 Punkte): *Mathematisches Pendel*

Im Bild sehen Sie ein ebenes Fadenpendel mit Masse m im homogenen Schwerefeld, dabei sei φ der Winkel zur Senkrechten, l die Länge des Fadens.



(a) Bestimmen Sie die Newton'sche Bewegungsgleichung für $\varphi(t)$.

(b) Bestimmen Sie die Periodendauer $\tilde{T}$ in der Näherung $\varphi_0 \ll 1$, wobei φ_0 die Amplitude der Schwinung sei.

(c) Betrachten Sie nun den Fall, dass die Näherung $\varphi_0 \ll 1$ nicht gelte und zeigen Sie, dass für die Periodendauer

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int\limits_0^{\varphi_0} \frac{1}{\sqrt{\cos\tilde{\varphi} - \cos\varphi_0}} \, \mathrm{d}\tilde{\varphi}$$

Verwenden Sie dazu die Anfangsbedingungen $\varphi(t=0) = \varphi_0 < \pi$ und $\dot{\varphi}(t=0) = 0$.
Hinweis: Multiplizieren Sie die Bewegungsgleichung mit $\dot{\varphi}$ und trennen Sie die Variablen. Die Integrationskonstante kann auch mit Energieerhaltung bestimmt werden.

(d) Zeigen Sie, dass man obiges Integral zu

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}$$

umschreiben kann, wobei $k^2 = \sin^2(\varphi_0/2)$ und $\sin u = \frac{\sin(\varphi/2)}{\sin(\varphi_0/2)}$ seien. Benutzen Sie bekannte Additionstheoreme.

(e) Beweisen Sie, dass man für kleine Auslenkungen unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung $\mathcal{O}(\varphi^4)$ die Periodendauer

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\sin^2\varphi_0}{4} + \cdots\right)$$

erhält. Lösen Sie dazu das oben gegebene elliptische Integral erster Gattung. Vergleichen Sie ihre Lösung mit der Kleinwinkelnäherung in (b).
Hinweis: Benutzen Sie $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, \mathrm{d}x = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}$.

(f) Werten Sie die exakte Lösung für T aus (d) numerisch aus und vergleichen Sie diese mit der Näherung in (e), indem Sie beide Funktionen für $\varphi_0 \in [0, \pi]$ plotten.

Aufgabe 4 (8 Punkte): *Raketenantrieb*
Beim Raketenantrieb werden Triebgase mit einer bestimmten Geschwindigkeit v_G (relativ zur Rakete) nach hinten ausgestoßen, die eine Rückstosskraft auf die Rakete ausüben und diese beschleunigen. Dies hat zur Folge, dass die Masse der Rakete $M(t)$ zeitabhängig ist. Es sei $M_0 = M(0)$ die Masse zur Zeit $t = 0$ und $M_L = M(T)$ die Masse der Rakete mit leeren Tanks nach Brennschluss zur Zeit $t = T$. Wir setzen einen konstanten Masseausstoß pro Zeiteinheit $K = -\dot{M}(t) > 0$ mit $K = \text{const.}$ voraus. Die Geschwindigkeit der Rakete sei $v_R(t) = \dot{x}(t)$, es soll nur eine Bewegung entlang der x-Achse betrachtet werden.

(a) Berechnen Sie die Masse $M(t)$ der Rakete zur Zeit $0 \leq t \leq T$.

(b) Zeigen Sie anhand der Newtonschen Axiome, dass die Bewegung der Raketengleichung

$$M(t)\frac{dv_R}{dt} + v_G\frac{dM(t)}{dt} = F_{\text{ext}}$$

folgt, wobei F_{ext} die Summe aller externen Kräfte bedeutet.

Hinweis: Zerlegen Sie den Gesamtimpuls des Systems in den Impuls p_R der Rakete (mitsamt des verbliebenen Treibstoffs) sowie den Impuls p_A des ausgestoßenen Abgases. Überlegen Sie zunächst wie die Impulsbilanz zu einem festen Zeitpunkt t aussieht. Stellen Sie anschließend die Impulsbilanz zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ auf, wobei Δt eine kleine Änderung in der Zeit sein soll.

(c) Nehmen Sie an, die Rakete startet zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ von der Erde $x_0 = 0$. Nehmen Sie zusätzlich vereinfachend an, daß die externe Kraft durch die Gravitation $F_{\text{ext}} = M(t)g$ mit fester Erdbeschleunigung g gegeben sei. Welche Geschwindigkeit $v_R(T)$ und welche Höhe $x(T)$ wird zum Zeitpunkt T (wenn also der Brennstoff vollständig verbraucht ist) erreicht?

(d) Plotten Sie $v_R(t)$ und $x(t)$ für $t \in [0, T]$.

Vorlesung:	• Dienstag 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202. • Mittwoch 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202.
Webseite:	• Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der TU Webseite mit Direktzugang: 176875
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte. • Bestandene Klausur.

Bemerkung: Bei den Übungsaufgaben werden nur Originalabgaben akzeptiert. Keine Kopien oder elektronischen Abgaben. Bei Programmieraufgaben ist verwendeter Code ausgedruckt mit abzugeben.