

Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
 Dr. Johannes Blaschke (Sprechstunde: Mi 10:00-11:00 in EW 708)

10. Übungsblatt – Statistische Physik

Abgabe/Vorrechnen: Mo. 16.01.2017 im Tutorium (12:15 - 13:45 EW 731)

M Aufgabe 29: *Virialkoeffizienten eines Gases harter Kugeln*

Der zweite und dritte Virialkoeffizient, $B_2(T)$ und $B_3(T)$ sind definiert als

$$B_2(T) = -\frac{1}{2V} \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 f(\mathbf{r}_{21})$$

$$B_3(T) = -\frac{1}{3V} \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \int d\mathbf{r}_3 f(\mathbf{r}_{21})f(\mathbf{r}_{31})f(\mathbf{r}_{32})$$

mit $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ und $f(\mathbf{r}) = (e^{-\beta V(\mathbf{r})} - 1)$.

Betrachten Sie ein Gas harter Kugeln im Volumen V mit

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} \infty, & |\mathbf{r}| < R \\ 0, & |\mathbf{r}| > R \end{cases} .$$

- (a) Berechnen Sie $B_2(T)$. Verwenden Sie dazu als Integrationsvariablen $\mathbf{q} \equiv \mathbf{r}_{21}$ und $\mathbf{Q} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$. Geben Sie die Zustandsgleichung an.
- (b) Berechnen Sie $B_3(T)$. Verwenden Sie dazu als Integrationsvariablen \mathbf{r}_1 , $\mathbf{q} \equiv \mathbf{r}_{31} - \mathbf{r}_{21}$ und $\mathbf{Q} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{31} + \mathbf{r}_{21})$. Das Integral über \mathbf{Q} kann man geometrisch auswerten. Geben Sie die Zustandsgleichung an.

S Aufgabe 30 (10 Punkte): *Zweiter Virialkoeffizient eines idealen Fermi Gases*

Die quantenmechanische großkanonische Zustandssumme eines Fermigases mit Eigenmodenenergien ϵ_k lautet

$$(1) \quad \mathcal{Z}_G = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + e^{\beta(\mu - \epsilon_n)}) .$$

Für freie Teilchen mit Masse m gilt $\epsilon(\mathbf{k}) = \hbar^2 k^2 / (2m)$. Das Gas befinde sich in einem Behälter mit Volumen V .

- (a) Zeigen Sie, dass im Kontinuumslimites ($\sum_n \rightarrow \frac{2V}{(2\pi)^3} \int d^3k$), Gl. (1) zu

$$\rho = \frac{N}{V} = C \int_0^{\infty} d\epsilon \frac{\epsilon^{1/2} \lambda e^{-\beta\epsilon}}{1 + \lambda e^{-\beta\epsilon}}$$

$$PV = C k_B T V \int_0^{\infty} d\epsilon \epsilon^{1/2} \ln(1 + \lambda e^{-\beta\epsilon})$$

führt, wobei $\lambda = e^{\beta\mu}$ die Fugazität ist und $C = (2m/\hbar^2)^{3/2} / (2\pi^2)$.

- (b) Leiten Sie unter der Annahme eines kleinen λ folgende Ausdrücke her.

$$(2) \quad \rho = \frac{1}{\Lambda^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \lambda^n}{n^{3/2}}$$

$$\frac{P}{k_B T} = \frac{1}{\Lambda^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \lambda^n}{n^{5/2}}$$

und bestimmen Sie Λ .

10. Übung SP WS16

- (c) Bringen Sie Gl. (2) in die Form $\lambda = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \dots$ (bis zur zweiten Ordnung).
- (d) Berechnen Sie damit den zweiten Virialkoeffizienten $B_2(T)$ und interpretieren Sie dessen Vorzeichen.

Zum Übungsbetrieb:

Die Übungsaufgaben teilen sich auf in mündliche **M** und schriftliche **S** Aufgaben. Die Kriterien für die Vergabe eines Übungsscheins gliedert sich daher in zwei Teile:

- Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
- Vorrechnen: Jeder Student kreuzt vor jeder Übung diejenigen Aufgaben auf einer ausliegenden Liste an, die er oder sie bearbeitet hat. Wer eine Aufgabe angekreuzt hat, ist bereit diese Aufgabe an der Tafel vorzurechnen. Für den mündlichen Teil des Scheinkriteriums müssen am Ende des Semesters in Summe 50% der mündlichen Aufgaben angekreuzt sein.