

Prof. Dr. Andreas Knorr

Dr. Alexander Carmele, Andreas Koher, Alexander Kraft

4. Übungsblatt – Quantenmechanik II**Abgabe: Di. 29.11.2016 um 8.15 Uhr, Beginn der Vorlesung!**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 7 (12 Punkte): Relativistische Energiekorrekturen

Zu dem bekannten nicht-relativistischen Hamilton-Operator des Wasserstoffatoms H_0 wurden in der Vorlesung zusätzliche relativistische Korrekturterme über die Dirac-Gleichung berechnet:

$$E\varphi = \left[\underbrace{\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m_e} + e\phi(r) \right)}_{=H_0} \hat{1} - \underbrace{\frac{\mathbf{p}^4}{8m_e^3 c^2}}_{=H_1} \hat{1} - \underbrace{\frac{\hbar^2 e \rho}{8m_e^2 c^2 \epsilon_0}}_{=H_2} \hat{1} + \underbrace{\frac{e \partial_r \phi}{2m_e^2 c^2 r}}_{=H_3} \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{l} \right] \varphi$$

Dabei ist H_1 der Term, den man bei der Berücksichtigung höherer Potenzen bei der Entwicklung des relativistischen Ausdrucks für die Energie erhält, H_2 der Darwin-Term und H_3 die Spin-Bahn-Kopplung. Hierbei sei das Kernpotential $\phi(r) = Ze/(4\pi\epsilon r)$ bekannt. Jetzt sollen die Energiekorrekturen in erster Ordnung Störungstheorie berechnet werden. Sei W ein Störoperator, dann ist die Energiekorrektur erster Ordnung gegeben durch das Matrixelement $\langle nlsjm_j | W | nlsjm_j \rangle = \int d^3r \varphi_{nlsjm_j}^*(\mathbf{r}) W(\mathbf{r}) \varphi_{nlsjm_j}(\mathbf{r})$.

- (a) Leiten Sie den kinetischen Korrekturterm H_1 aus der relativistischen Energie-Dispersion $E^2 = (cp)^2 + m^2 c^4$ her.
- (b) Leiten Sie die Abhängigkeit der Energiekorrekturen $\Delta E_1 = \langle nlsjm_j | H_1 | nlsjm_j \rangle$, ΔE_2 und ΔE_3 von den Energieeigenwerten des ungestörten Wasserstoffatoms her. Bestätigen Sie insbesondere die folgenden Ergebnisse aus der Vorlesung:

$$\Delta E_1 = \text{Ryd}(Z\alpha)^2 \frac{1}{n^4} \left(\frac{3}{4} - \frac{n}{l+1/2} \right)$$

$$\Delta E_2 = \text{Ryd}(Z\alpha)^2 \frac{1}{n^3} \delta_{l,0}$$

$$\Delta E_3 = \begin{cases} 0, & \text{wenn } l = 0 \\ \frac{1}{2} \text{Ryd}(Z\alpha)^2 \frac{1}{n^3} \frac{1}{l(l+1/2)(l+1)} \begin{cases} \cdot l & , \text{ wenn } j = l + 1/2 \\ \cdot (-l - 1) & , \text{ wenn } j = l - 1/2 \end{cases} \end{cases}$$

Hierbei sind die Rydbergenergie und die Feinstrukturkonstante durch $\text{Ryd} = mc^2(Z\alpha)^2/2$ und $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon\hbar)$ gegeben. Außerdem können Sie die folgenden Relationen nutzen:

$$\langle nlsjm_j | r^{-1} | nlsjm_j \rangle = \frac{m_e Z e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

$$\langle nlsjm_j | r^{-2} | nlsjm_j \rangle = \left(\frac{m_e Z e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} \right)^2 \frac{1}{n^3(l+1/2)}$$

$$\langle nlsjm_j | r^{-3} | nlsjm_j \rangle = \left(\frac{m_e Z e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} \right)^3 \frac{1}{n^3 l(l+1/2)(l+1)}$$

4. Übung TPV WS2016/17

Aufgabe 8 (8 Punkte): Clebsch-Gordon-Koeffizienten

In der Vorlesung vom 10.11.2016 wurde der (anomale) Zeeman-Effekt störungstheoretisch behandelt. Dazu ist es notwendig gewesen die Eigenvektoren des ungestörten Problems $\langle n, l, s, j, m_j |$ in der Basis $\langle n, l, s, m_l, m_s |$ zu entwickeln, wobei die sogenannten Clebsch-Gordon-Koeffizienten auftreten. Leiten Sie die in der Vorlesung eingeführten Koeffizienten α_+ und β_+ her:

$$\alpha_+ = \sqrt{\frac{l + m_l + 1}{2l + 1}}$$
$$\beta_+ = \sqrt{\frac{l - m_l}{2l + 1}}.$$

Diese Koeffizienten ergeben sich für das Wasserstoffatom ($s = 1/2$) aus der Entwicklung

$$\langle l, s, j = l + 1/2, m_j | = \alpha_+ \langle l, s, m_l, +1/2 | + \beta_+ \langle l, s, m_l + 1, -1/2 |$$