Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Javier Cerrillo

1. Übungsblatt – TPVI: Quantensysteme im Nichtgleichgewicht

Abgabe: Mi. 16.11.2016 12:15 Uhr im Tutorium

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 1 (10 Punkte): *Statistik: Grundlagen*

(a) (1+2+3) Sei $\mathcal{M}(\chi, t)$ eine momentenerzeugende Funktion. Die zugehörige kumulantenerzeugende Funktion lautet

$$\mathcal{F}(\chi, t) = \log \mathcal{M}(\chi, t). \tag{1}$$

Drücke die erste drei Kumulanten als Funktion von Momenten aus.

(b) (4) Berechne die erste Momente und alle Kumulanten von der Gaußche-Verteilung

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{2}$$

mit Hilfe von der jeweiligen erzeugenden Funktionen.

Aufgabe 2 (20 Punkte): *Zählprozess mit einem internen Zustand*

Wir betrachten die Zählstatistik $p(n, t)$ für den unidirektionalen Transport durch einen einzelnen Quantenpunkt, d.h. das im Skript diskutierte System (Sekt. 1.2). Wir führen hierzu in den Raten Γ_R und Γ_L den Asymmetrie-Parameter $-1 \leq a \leq 1$ über

$$\Gamma_R = \Gamma_L \frac{1-a}{1+a} \tag{3}$$

ein und setzen in der Numerik immer $\Gamma_L = 1$.

(a) (5) Zeige durch einfaches Nachrechnen, dass der stationäre Strom durch

$$I_{st} = \frac{\Gamma_L \Gamma_R}{\Gamma_R + \Gamma_L} \tag{4}$$

gegeben ist. Berechne weiterhin die zweite Kumulante und drücke sie durch den Asymmetrie-Parameter a aus.

(b) (5) Berechne die kumulantenerzeugende Funktion für große Zeiten ($t \to \infty$) analytisch im Grenzfall $a \to 1$ und $a \to -1$ und diskutiere diese beiden Grenzfälle physikalisch.

(c) (10) Berechne die Verteilung $\tilde{p}(m, t)$ im mitbewegten System numerisch für lange Zeiten (unter Benutzung des Ausdrucks für den Eigenwert $\lambda_-(\chi)$). Fertige Plots von $\tilde{p}(m, t)$ als Funktion von m für verschiedene Werte von t und a an. Was passiert, wenn man in der Numerik zu kleine Werte für die Zeit t nimmt?

(d) (Projekt) Berechne die Zählstatistik $p(n, t)$ durch numerisches Lösen des Systems der Differentialgleichungen für drei verschiedene Werte von a, z.B. $a = -0.9$, $a = 0$, $a = 0.9$. Fertige 2d-Plots von $p(n, t)$ als Funktion von n zu verschiedenen Zeiten t an. Berechne hieraus die ersten drei Kumulanten $C_k(t)$, $k = 1, 2, 3$ als Funktion der Zeit.

Allgemeine Lösung Eine allgemeine Beziehung zwischen dem Kumulant c_l und den Momenten m_j $(1 \leq j \leq l)$ ist durch die folgende Determinante gegeben

$$c_l = (-1)^{l+1} \begin{vmatrix} m_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_2 & m_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_3 & m_2 & \binom{2}{1} m_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_4 & m_3 & \binom{3}{1} m_2 & \binom{3}{2} m_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{l-1} & m_{l-2} & \binom{l-2}{1} m_{l-3} & \binom{l-2}{2} m_{l-4} & \cdots & \ddots & 1 \\ m_l & m_{l-1} & \binom{l-1}{1} m_{l-2} & \binom{l-1}{2} m_{l-3} & \cdots & \cdots & \binom{l-1}{l-2} m_1 \end{vmatrix}$$

Vorlesung:	• Do. 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203. • Fr. 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203.
Übung:	• Mi. 12:00 Uhr –14:00 Uhr im EW 731.
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte. • Regelmäßige und aktive Teilnahme am Tutorium. • Numerisches Projekt.