Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Javier Cerrillo

2. Übungsblatt – TPVI: Quantensysteme im Nichtgleichgewicht

Abgabe: Mi. 23.11.2016 12:15 Uhr im Tutorium

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 3 (20 Punkte): *Fano-Anderson-Modell*

Wir betrachten den Tunnel-Hamiltonian (ohne Zählfeld)

$$\hat{\mathcal{H}} \equiv \hat{\mathcal{H}}_d + \hat{\mathcal{H}}_{res} + \hat{\mathcal{V}} \equiv \epsilon_0 d^\dagger d + \sum_{k\alpha} \epsilon_{k\alpha} c^\dagger_{k\alpha} c_{k\alpha} + V_{k\alpha} c^\dagger_{k\alpha} d + V^*_{k\alpha} c_{k\alpha} d^\dagger \tag{1}$$

(a) (5) Vorbereitung: Beweise

$$e^S O e^{-S} = O + [S, O] + \frac{1}{2!}[S, [S, O]] + \frac{1}{3!}[S[S, [S, O]]] \tag{2}$$

durch Herleitung einer Differenzialgleichung erster Ordnung für $f(x) \equiv e^{xS} O e^{-xS}$ und Taylor-Entwicklung in x.

(b) (5) Mit Hilfe der Laplace-Transformation, berechne aus den Heisenbergschen Bewegungsgleichungen die Zeitabhängigkeit des Dot-Operators $d(t)$. Hierzu soll bei der Rechnung angenommen werden, dass $\epsilon_0 = 0$ und dass die Energie (E)-Abhängigkeit der Tunnelraten

$$\Gamma_\alpha(E) \equiv 2\pi \sum_k |V_{k\alpha}|^2 \, \delta(\epsilon_{k\alpha} - E) \tag{3}$$

vernachlässigt werden darf, d.h. wir setzen $\Gamma_\alpha(E) \to \Gamma_\alpha$.

(c) (5) Berechne mit dem Ergebnis aus b) eine allgemeine integrale Formel für die Besetzungswahrscheinlichkeit des Dots $\bar{n}_d$ zu langen Zeiten $t \to \infty$, und werte diese konkret für die Reservoir-Temperaturen $T_\alpha = 0$, $\alpha = L, R$, aus.

(d) (5) Die allgemeine Formel für $\bar{n}_d$ lautet

$$\bar{n}_d = \frac{1}{2} + \sum_\alpha \frac{\Gamma_\alpha}{\Gamma} \frac{1}{2\pi i} \left[\psi\left(\frac{1}{2} + \beta_\alpha \frac{i\Gamma/2 - \mu_\alpha}{2\pi i} \right) - \psi\left(\frac{1}{2} - \beta_\alpha \frac{-i\Gamma/2 - \mu_\alpha}{2\pi i} \right) \right], \tag{4}$$

wo ψ ist die Digamma-Funktion, β_α und μ_α sind die inverse Temperatur und das chemische Potential des Reservoirs α und $\Gamma = \Gamma_R + \Gamma_L$. Fertige Plots von $\bar{n}_d$ als Funktion des Potential-Abfalls $V = \mu_L - \mu_R$ und des Temperatur-Unterschiedes $\Delta T = T_L - T_R$.

(e) (Projekt) Lass uns die Mastergleichung für den unidirektionalen Transport (Aufgabe 2 oder Skript Sekt. 1.2) weiterentwickeln. Substituiere die Ursprüngliche Raten Γ_L und Γ_R mit $\Gamma_L f_L$ und $\Gamma_L \frac{1-a}{1+a}(1 - f_R)$, wo wieder $-1 \leq a \leq 1$ und f_α die Bewertung auf der Energie des Quantendots von der Fermi-Funktion vom Reservoir α ist. Fertige Plots von der Besetzungswahrscheinlichkeit des Dots zu langen Zeiten als Funktion des Asymmetrie-Parameters a für verschiedene Temperaturen T_L, T_R und chemische Potentiale μ_L, μ_R. Vergleiche mit der analytischen Vorhersage aus d) und erkläre der Grund für die Unterschiede und die Übereinstimmungen.