Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Javier Cerrillo

3. Übungsblatt – TPVI: Quantensysteme im Nichtgleichgewicht

Abgabe: Mi. 30.11.2016 12:15 Uhr im Tutorium

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 4 (15 Punkte): *Kramers-Kronig-Relationen*

Die dynamische Suszeptibilität vom Operator A als Antwort zum Operator B wird definiert

$$\chi_{AB}(t) \equiv iTr\left\{\rho_0\left[\tilde{A}(t), B\right]\right\}\theta(t) \tag{1}$$

für Anfangszustände ρ_0 die mit dem ungestörten Hamilton-Operator umtauschbar sind.

(a) (5) Beweise die Kramers-Kronig-Relationen

$$\chi''_{AB}(\omega) = -P\int\frac{d\omega'}{\pi}\frac{\chi'_{AB}(\omega')}{\omega'-\omega} \tag{2}$$

$$\chi'_{AB}(\omega) = +P\int\frac{d\omega'}{\pi}\frac{\chi''_{AB}(\omega')}{\omega'-\omega} \tag{3}$$

(b) (5) Benutze den Residuensatz zum Beweis von

$$\int d\omega\frac{e^{-i\omega t}}{2\pi}\frac{1}{\omega'-\omega-i0} = ie^{-i\omega' t}\theta(t). \tag{4}$$

(c) (5) Seien A und B hermitesche Operatoren. Beweise die Symmetrierelationen

$$\chi'_{AB}(\omega) = \chi'_{AB}(-\omega), \qquad \chi''_{AB}(\omega) = -\chi''_{AB}(-\omega) \tag{5}$$

für den Real- und Imaginärteil der dynamischen Suszeptibilität.

Aufgabe 5 (10 Punkte): *Mastergleichung Fano-Anderson-Modell*

Die Mastergleichung im Unterraum der Besetzungen für das Fano-Anderson-Modell im Markovschen Limes lautet

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_0(\boldsymbol{\chi},t) \\ \dot{p}_1(\boldsymbol{\chi},t) \end{pmatrix} = \sum_{\alpha\in\{L,R\}}\Gamma_\alpha\begin{pmatrix} -f_\alpha & e^{i\chi_\alpha}(1-f_\alpha) \\ e^{-i\chi_\alpha}f_\alpha & -(1-f_\alpha) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_0(\boldsymbol{\chi},t) \\ p_1(\boldsymbol{\chi},t) \end{pmatrix} \equiv \mathcal{L}(\boldsymbol{\chi})\mathbf{p}(\boldsymbol{\chi},t). \tag{6}$$

(a) (5) Finde die Langzeit-Besetzung des Dots und vergleiche mit Gl.(4) im Übungsblatt 2.

(b) (5) Die Berechnung von Kumulanten aus Gl.(6) kann deutlich vereinfacht werden, indem man eine spezifischere Gleichung herleitet. Zeige die Verbindung zwischen der kumulantenerzeugenden Funktion $\phi(\boldsymbol{\chi},t) = \frac{d}{dt}\log\left[p_0(\boldsymbol{\chi},t) + p_1(\boldsymbol{\chi},t)\right]$ und dem Vektor

$$X(\boldsymbol{\chi},t) = \frac{\mathbf{p}(\boldsymbol{\chi},t)}{p_0(\boldsymbol{\chi},t) + p_1(\boldsymbol{\chi},t)} \tag{7}$$

Drücke die zeitliche Ableitung von $X(\boldsymbol{\chi},t)$ als Funktion von sich selbst und $\phi(\boldsymbol{\chi},t)$. Zerlege anschließend die Gleichungen für $\phi(\boldsymbol{\chi},t)$ und $X(\boldsymbol{\chi},t)$ in Taylor Komponenten als Funktion von χ_L oder χ_R.

(c) (Projekt) Berechne den Fano-Faktor (der Verhältnis zwischen dem zweiten und dem ersten Kumulant) (1) durch Simulation von Gl.(6) für verschiedene Werte von χ_L oder χ_R und (2) durch Anwendung der Formel aus (c). Welcher Wert nähert der Fano-Faktor bei großer Potential-Abfall und gleiche Kopplungsstärken $\Gamma_R = \Gamma_L$? Warum?