Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Javier Cerrillo

4. Übungsblatt – TPVI: Quantensysteme im Nichtgleichgewicht

Abgabe: Mi. 07.12.2016 12:15 Uhr im Tutorium

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 6 (10 Punkte): *Spontane Emission aus einem Zwei-Niveau-Atom*

Die Hamilton-Funktion für einem Zwei-Niveau-Atom in Wechselwirkung mit einem Oszillator-Bad in der RWA lautet

$$\begin{aligned} H_{\text{total}} &\equiv H_S + H_B + H_{SB} \\ &= \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z + \sum_Q \omega_Q a_Q^\dagger a_Q + \sum_Q \gamma_Q (a_Q\sigma_+ + a_Q^\dagger \sigma_-). \end{aligned}$$

Leite die Mastergleichung für die Dichte-Matrix des Zwei-Niveau-Systems in Bornsche und Markovsche Näherung her:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho(t) &= -i\tfrac{1}{2}\left(\omega_0 + \delta\omega_0\right)[\sigma_z, \rho] - \tfrac{1}{2}\gamma_+\Big\{\sigma_+\sigma_-\rho + \rho\sigma_+\sigma_- - 2\sigma_-\rho\sigma_+\Big\} \\ &- \tfrac{1}{2}\gamma\Big\{\sigma_-\sigma_+\rho + \rho\sigma_-\sigma_+ - 2\sigma_+\rho\sigma_-\Big\}. \end{aligned}} \tag{1}$$

und bestimme die Raten γ and γ_+ und die Frequenz-Verschiebung $\delta\omega_0$ als Funktion der Spektraldichte $\rho(\omega) \equiv \sum_Q \gamma_Q^2 \delta(\omega_Q - w)$.

Aufgabe 7 (5 Punkte): *Bloch-Gleichungen*

Leite die Bloch-Gleichungen aus der Master-Gleichung in (1) her

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle\sigma_z\rangle &= -\frac{1}{T_1}\left(\langle\sigma_z\rangle - \langle\sigma_z\rangle_\infty\right), \quad \langle\sigma_z\rangle_\infty \equiv \frac{\gamma - \gamma_+}{\gamma + \gamma_+} \\ \frac{d}{dt}\langle\sigma_+\rangle &= \left(+i\bar{\omega}_0 - \frac{1}{T_2}\right)\langle\sigma_+\rangle \\ \frac{d}{dt}\langle\sigma_-\rangle &= \left(-i\bar{\omega}_0 - \frac{1}{T_2}\right)\langle\sigma_-\rangle, \end{aligned}$$

und drücke die Relaxation- und Dekohärenzzeiten, T_1 and T_2, als Funktion von γ und γ_+ (NB: $\bar{\omega}_0 \equiv \omega_0 + \delta\omega_0$).

Bitte Rückseite beachten!⟶

4. Übung TPVI WS16

Aufgabe 8 (5 Punkte): *Stochastische Schrödinger-Gleichung*

Eine Master-Gleichung der Lindblad-Form

$$\frac{d}{dt}\rho(t) \quad = \quad -i[H,\rho] + \textstyle\sum_\alpha \gamma_\alpha \left[L_\alpha \rho L_\alpha^\dagger - \frac{1}{2}\left\{L_\alpha^\dagger L_\alpha, \rho\right\}\right]$$

darf als stochastische Schrödinger-Gleichung (SSG) aufgefasst werden

$$\begin{aligned} |d\Psi\rangle \quad = \quad & \left[-iH - \frac{1}{2}\sum_\alpha \gamma_\alpha L_\alpha^\dagger L_\alpha + \frac{1}{2}\sum_\alpha \gamma_\alpha \langle\Psi|L_\alpha^\dagger L_\alpha|\Psi\rangle\right]|\Psi\rangle dt \\ & + \sum_\alpha \left(\frac{L_\alpha|\Psi\rangle}{\sqrt{\langle\Psi|L_\alpha^\dagger L_\alpha|\Psi\rangle}} - |\Psi\rangle\right) dN_\alpha \end{aligned}$$

wo die Poisson-Schritte dN_α genügen $dN_\alpha dN_\beta = \delta_{\alpha\beta} dN_\alpha$ und $\mathcal{E}(dN_\alpha) = \gamma_\alpha\langle\Psi|L_\alpha^\dagger L_\alpha|\Psi\rangle dt$, wo $\mathcal{E}(x)$ der stochastische Erwartungswert ist.

(a) (5) Schreibe eine SSG für Gl.(1)

(b) (Projekt) Plotten die Komponenten des Bloch-Vektors, $\langle\sigma_i\rangle; i = x, y, z$, und die Normierung, $\mathrm{Tr}\rho$, als Funktion der Zeit für einige Trajektorien mit Anfangszustand

$$|\Psi(0)\rangle = 2^{-1/2}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right). \qquad (2)$$

(c) (Projekt) Vergleiche der Durchschnitt über mehrere Trajektorien mit der Lösung der Bloch-Gleichungen. Wie steigt der Anzahl der Trajektorien qualitativ mit der Genauigkeit der Lösung?