Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Javier Cerrillo

5. Übungsblatt – TPVI: Quantensysteme im Nichtgleichgewicht

Abgabe: Mi. 14.12.2016 12:15 Uhr im Tutorium

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 9 (30 Punkte): *Dark state cooling of trapped ions*

Bei Experimenten mit einem gefangenen Ion ist es nötig die Temperatur zu erniedrigen, indem man mit Laserstrahlung die Ionenbewegung beeinflusst. Eine realistische Hamiltonsche Funktion für ein Laser-bestrahltes drei-Niveau-System in einer Dimension ist

$$\begin{aligned} H &= \omega_1 |1\rangle\langle 1| + \omega_2 |2\rangle\langle 2| + \omega_e |e\rangle\langle e| + \nu b^\dagger b \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[\Omega_1 \cos(\omega_{L1}t - k_{L1}x)|1\rangle\langle e| + \Omega_2 \cos(\omega_{L2}t - k_{L2}x)|2\rangle\langle e| + H.c.\right], \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $\hbar = 1$ gesetzt wurde, $|i\rangle$ mit $i \in \{1, 2, e\}$ die jeweilige elektronische Zustände sind, ω_i die assoziierten Energien, $b^\dagger$ der erzeugende Operator und x die Position des Ions in einer harmonischen Falle der Frequenz ν, und Ω_j, ω_{Lj} und k_{Lj} mit $j \in \{1, 2\}$ jeweils die Rabi-Frequenz, die Laser-Frequenz und die Laser-Wellenzahl sind.

(a) (5) Finde ein Bild zur Anwendung der Rotating Wave Approximation (RWA), damit die Hamiltonsche Funktion zeitunabhängig wird.

(b) (2) Zeige, dass im Limes der großen Laser-Wellenlänge und der niedrigen Temperatur (Lamb-Dicke-Limes) die Hamiltonsche Funktion Gl.(1) als

$$\begin{aligned} H &= \Delta_1 |1\rangle\langle 1| + \Delta_2 |2\rangle\langle 2| + \nu b^\dagger b + \frac{1}{2}\left(\Omega_1 |1\rangle\langle e| + \Omega_2 |2\rangle\langle e| + H.c.\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[i\eta_1\Omega_1 |1\rangle\langle e| \left(b^\dagger + b\right) + i\eta_2\Omega_2 |2\rangle\langle e| \left(b^\dagger + b\right) + H.c.\right], \end{aligned} \tag{2}$$

gegeben ist. Bestimme die Verstimmungen Δ_j und die Lamb-Dicke-Parameter η_j, wobei $j \in \{1, 2\}$.

(c) (3) Die spontane Emission des erregten Zuständes $|e\rangle$ lässt sich mittels einer Master-Gleichung (siehe Aufgabe 6) modellieren. Unter der Annahme, dass optische Frequenzen der Umgebung nicht besetzt sind, finde eine passende Master-Gleichung für dieses 3-Niveau-System.

(d) (5) Für $\Delta_1 = \Delta_2$ und $\eta_j \to 0$ lässt sich das elektronische System Gl.(2) zu einem effektiven 2-Niveau-System vereinfachen, indem man ein Dunkel-Zustand definiert. Finde die dazugehörigen Bloch-Gleichungen. Welcher ist der elektronische langzeit Zustand?

(e) (10) Leite eine Mastergleichung für den Bewegungsfreiheitsgrad her

$$\begin{aligned} \dot\rho &= (\mathcal{L}_0 + \mathcal{J}_- + \mathcal{J}_+)\rho = -i[\nu b^\dagger b, \rho] - \frac{A_-}{2}\left(b^\dagger b\rho + \rho b^\dagger b - 2b\rho b^\dagger\right) \\ &\quad - \frac{A_+}{2}\left(bb^\dagger\rho + \rho bb^\dagger - 2b^\dagger\rho b\right), \end{aligned} \tag{3}$$

und berechne die Raten A_- und A_+ mit Hilfe des Quanten-Regressions-Theorems.

(f) (5) Drücke die mittlere Besetzungszahl für lange Zeiten $\langle n\rangle$ $(t \to \infty)$ und die Kühlungsrate als Funktion von den Raten A_- und A_+ aus. Optimiere diese als Funktion von den Verstimmungen und den Rabi-Frequenzen.

(g) (Projekt) Simuliere die Mastergleichung aus (d) und bestimme, in welcher Situtationen die Mastergleichung Gl.(3) ungültig ist, sei es wegen der Verletzung der Bornschen oder der Markovschen Näherung.