Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. Sabine Klapp
Dr. Marten Richter, Andreas Koher
Willy Knorr, Philipp Knospe, Ché Netzer, Philipp Stammer

4. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: Mi. 22. November 2017 vor der Vorlesung im Hörsaal EW 201

Bei der Bepunktung wird Wert gelegt auf **ausführliche Zwischenschritte** *und* **Kommentare** *zur Lösungsstrategie. Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an! Elektronische, gedruckte oder kopierte Abgaben (Ausnahme Numerikaufgaben) sind nicht zugelassen.*

Aufgabe 1 (10 Punkte): *Zwangskräfte: Perle auf einer Schraubenlinie*

Eine Perle der Masse m gleitet unter der Gravitationskraft $\underline{F} = -mg\underline{e}_z$ reibungsfrei auf einer Schraubenlinie mit dem Radius R. Die freie Bewegung der Perle wird also zum einen dadurch eingeschränkt, dass ein konstanter Radius festgelegt wird (1. Zwangsbedingung) und zum anderen sei die z-Koordinate durch den Polarwinkel φ festgelegt (2. Zwangsbedingung).

$$\underline{r}(t) = (R\cos\varphi(t), R\sin\varphi(t), b\varphi(t)). \tag{1}$$

1. Formulieren Sie die Bewegungsgleichung $m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} + \sum_\alpha \underline{Z}_\alpha$ unter Verwendung von Zylinderkoordinaten, also $\rho(t)$, $\varphi(t)$, und $z(t)$. (Setzen Sie die Nebenbedingungen, die in (1) enthalten sind noch nicht ein!!!). Die Zwangsbedingungen $\underline{Z}_\alpha$ sollen hier noch unbestimmt bleiben.

2. Formulieren Sie nun in diesen Koordinaten die Zwangsbedingungen zunächst als Gleichungen $g_\alpha(\rho, \varphi, z) = 0$ und danach in differentieller Form $dg_\alpha = \sum_{j=\rho,\varphi,z} a_{\alpha j} dq_j = 0$, wobei $(q_1 = \rho,\ q_2 = \varphi,\ q_3 = z)$. Beachten Sie hierbei die Darstellung des Gradienten in Zylinderkoordinaten. Lesen Sie abschließend die Koeffizienten $a_{\alpha j}$ ab.

3. Geben Sie die Zwangskräfte Z_z, Z_φ und Z_ρ über $Z_i = \sum_\alpha \lambda_\alpha a_{\alpha i}$ an, wobei die λ_α noch ubekannt sind.

4. Bestimmen Sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art für die Koordinaten ρ, φ, z.

5. Kombinieren Sie nun die Bewegungsgleichungen unter Verwendung der Z_i und den g_α, um die λ_α explizit angeben zu können.

Aufgabe 2 (10 Punkte): *Der total antisymmetrische Tensor dritter Stufe*
Wir betrachten zunächst ein System orthonormaler Basisvektoren, die ein Rechtssystem darstellen:

$$\underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3; \quad \underline{e}_2 \times \underline{e}_3 = \underline{e}_1; \quad \underline{e}_3 \times \underline{e}_1 = \underline{e}_2.$$

1. Begründen Sie zunächst die folgenden Zusammenhänge:

$$\underline{e}_i \cdot (\underline{e}_j \times \underline{e}_k) = \begin{cases} 1, \text{ falls } i,j,k \text{ zyklisch aus } (1,2,3) \\ -1, \text{ falls } i,j,k \text{ antizyklisch aus } (1,2,3) \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

2. Zur Abkürzung führt man den ϵ-Tensor, bzw. den total antisymmetrischen Tensor dritter Stufe ein: $\epsilon_{ijk} = \underline{e}_i \cdot (\underline{e}_j \times \underline{e}_k)$. Damit lässt sich nun das Vektorprodukt bequem darstellen: $(\underline{a} \times \underline{b})_k = \sum_{ij} \epsilon_{ijk} a_i b_j$. Stellen Sie das Spatprodukt $\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c})$ durch den ϵ-Tensor dar und begründen sie die zyklische Vertauschbarkeit der Vektoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ und $\underline{c}$.

3. Beweisen Sie die Relation:

$$\sum_j \epsilon_{ikj} \epsilon_{jlm} = \delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl}$$

4. Mithilfe der vorhergehenden Relation können Sie nun den Entwicklungssatz beweisen:

$$[\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c})]_k = [\underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b})]_k$$

5. Zeigen Sie abschließend die folgenden zwei Zusammenhänge:

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})(\underline{b} \cdot \underline{d}) - (\underline{a} \cdot \underline{d})(\underline{b} \cdot \underline{c})$$
$$\mathrm{rot}(f(\underline{r})\underline{F}(\underline{r})) = \mathrm{grad}(f) \times \underline{F} + f\mathrm{rot}(\underline{F})$$

   Hierbei sind $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ $\underline{r} \in \mathbb{R}^3$ Vektoren, $f(\underline{r})$ ein skalares Feld und $\underline{F}(\underline{r})$ ein Vektorfeld.

Homepage: Aktuelle Informationen zur Vorlesung und Übung, findet ihr auf unserer Homepage:
http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ws_201718/pflichtveranstaltungen_bachelorstudium/mechanik17/

Vorlesung: Di. um 8:15 Uhr – 9:45 Uhr in EW 201,
Mi. um 8:15 Uhr – 9:45 Uhr in EW 201.

Übungen: Die Tutorien beginnen in der zweiten Vorlesungswoche. Die Tutorieneinteilung, Punkteverteilung und Scheinvergabe erfolgt über das Mosessystem. Der Anmeldezeitraum geht bis Mittwoch, den 18. Oktober 2017 18:00. Benötigt wird ein tubIT-Account.

Klausur- und Scheinkriterien:

Die Klausur findet am Dienstag, den 06.02.2018, im Raum H 0104 von 8:00-10:00 Uhr s.t. statt. Zulassungskriterien für die Klausur sind 50% der Punkte aus den Übungsaufgaben dieses Semesters, einmal erfolgreich vorgerechnet und eine aktive Teilnahme in den Tutorien. Scheinkriterium ist die bestandenen Klausur bzw. Nachklausur.