Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. Sabine Klapp
Dr. Marten Richter, Andreas Koher
Willy Knorr, Philipp Knospe, Ché Netzer, Philipp Stammer

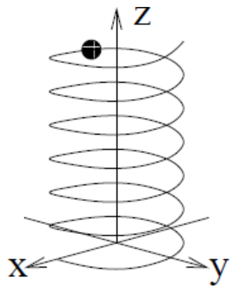
6. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: Mi. 06. Dezember 2017 vor der Vorlesung im Hörsaal EW 201

Bei der Bepunktung wird Wert gelegt auf **ausführliche Zwischenschritte** *und* **Kommentare** *zur Lösungsstrategie. Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an! Elektronische, gedruckte oder kopierte Abgaben (Ausnahme Numerikaufgaben) sind nicht zugelassen.*

Aufgabe 1 (4 Punkte): *Perle auf einer Schraubenlinie im Lagrange-II-Formalismus*

Wir behandeln die Aufgabe 1 aus dem 4. Übungsblatt diesmal im Lagrange-II-Formalismus. Zur Erinnerung: Eine Perle der Masse m gleite unter Einwirkung der Gravitationskraft $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$ auf einer Schraubenlinie mit konstantem Radius R und Polarwinkel $\phi(t)$ (siehe Abbildung)



$$(R\cos\phi(t),\ R\sin\phi(t),\ b\phi(t))\,,$$

mit $R, b > 0$.

1. Formulieren Sie die Lagrange-Funktion des gegebenen Problems unter Verwendung der Zwangsbedingungen.

2. Leiten Sie eine Differentialgleichung für $\ddot{\phi}$ im Lagrange-II-Formalismus her.

3. Formulieren Sie die Lösung der Differentialgleichung für $\ddot{\phi}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte): *Noether-Theorem*

Die folgende Lagrange-Gleichung beschreibe ein Teilchen der Masse m in einem Potential V:

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - V\left(x^2 + y^2, z\right)$$

1. Zeigen Sie, dass die Langrange-Funktion invariant gegenüber einer Rotation um die z-Achse (Drehwinkel α) ist.

2. Leiten Sie daraus eine Erhaltungsgröße ab.

Aufgabe 3 (8 Punkte): *Dipolnäherung als kanonische Transformation*

Wir betrachten die Dipolnäherung für ein gebundenes Teilchen der Masse m und Ladung q. Dazu gehen wir von der folgenden Lagrangefunktion aus:

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - V_0(\vec{r}) - q\varphi(\vec{r}, t) + q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) \tag{1}$$

Hierbei verwenden wir ein unbestimmtes Potential $V_0(\vec{r}, t)$, das skalare Potential des E-Felds $\varphi(\vec{r}, t)$ und das Vektorpotential eines B-Felds $\vec{A}(\vec{r}, t)$. Als nächstes führen wir eine Eichtransformation $L \to L' = L + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}R(\vec{r}, t)$, mit der folgenden Erzeugenden $R(\vec{r}, t)$ ein:

$$R(\vec{r}, t) = -q\vec{r} \cdot \vec{A}(0, t) - \frac{q}{2}\vec{r} \cdot \left[\left(\vec{r} \cdot \nabla|_{\vec{r}=0}\right)\vec{A}(\vec{r}, t)\right]. \tag{2}$$

1. Zeigen Sie dass sich L mittels der Erzeugenden R transformieren läßt auf:

$$\begin{aligned} L' &= \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - V_0(\vec{r}) - q\varphi(\vec{r},t) + q\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}(\vec{r},t) - q\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}(0,t) - q\vec{r}\cdot\dot{\vec{A}}(0,t) \\ &\quad -\frac{q}{2}\dot{\vec{r}}\cdot\left[(\vec{r}\cdot\nabla)|_{r=0}A(\vec{r},t)\right] - \frac{q}{2}\vec{r}\cdot\left[(\dot{\vec{r}}\cdot\nabla)|_{r=0}A(\vec{r},t)\right] - \frac{q}{2}\vec{r}\cdot\left[(\vec{r}\cdot\nabla)|_{r=0}\dot{A}(\vec{r},t)\right] \end{aligned} \tag{3}$$

2. Zeigen Sie zunächst:

$$\frac{q}{2}\dot{\vec{r}}\cdot\left[(\vec{r}\cdot\nabla)|_{r=0}A(\vec{r},t)\right] - \frac{q}{2}\vec{r}\cdot\left[(\dot{\vec{r}}\cdot\nabla)|_{r=0}A(\vec{r},t)\right] = \frac{q}{2}(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})\cdot(\nabla\times\vec{A}(0,t)) \tag{4}$$

3. Begründen Sie warum der Term

$$-\frac{q}{2}\vec{r}\cdot\left[(\vec{r}\cdot\nabla)|_{r=0}\dot{A}(\vec{r},t)\right] \approx 0 \tag{5}$$

vernachlässigt werden kann, wenn man sich auf Dipolterme beschränkt.

4. Zeigen Sie, dass damit L' dargestellt werden kann als:

$$L' = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - \tilde{V}_0(\vec{r}) + q\vec{r}\cdot\vec{E}(0,t) + \frac{q}{2}\left(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}\right)\cdot\vec{B}(0,t) \tag{6}$$

Kommentieren Sie welcher Term der elektrischen und welcher Term der magnetischen Dipolwechselwirkung zuzuordnen ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte): *Legendre-Transformation*
Berechnen Sie die Legendre-Transformierte $g(u)$ und die Rücktransformierte folgender Funktionen:

1. $f_1(x) = \beta(x-\gamma)^2$ mit $\beta, \gamma = \text{const.}$
2. $f_2(x) = \frac{1}{\alpha}x^\alpha$ mit $\alpha = \text{const.}$

Homepage: Aktuelle Informationen zur Vorlesung und Übung, findet ihr auf unserer Homepage:
http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ws_201718/pflichtveranstaltungen_bachelorstudium/mechanik17/

Vorlesung: Di. um 8:15 Uhr – 9:45 Uhr in EW 201,
Mi. um 8:15 Uhr – 9:45 Uhr in EW 201.

Übungen: Die Tutorien beginnen in der zweiten Vorlesungswoche. Die Tutorieneinteilung, Punkteverteilung und Scheinvergabe erfolgt über das Mosessystem. Der Anmeldezeitraum geht bis Mittwoch, den 18. Oktober 2017 18:00. Benötigt wird ein tubIT-Account.

Klausur- und Scheinkriterien:

Die Klausur findet am Dienstag, den 06.02.2018, im Raum H 0104 von 8:00-10:00 Uhr s.t. statt. Zulassungskriterien für die Klausur sind 50% der Punkte aus den Übungsaufgaben dieses Semesters, einmal erfolgreich vorgerechnet und eine aktive Teilnahme in den Tutorien. Scheinkriterium ist die bestandenen Klausur bzw. Nachklausur.