

Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)  
 Arne Zantop (Sprechstunde: Do 10:00-11:00 in EW 701)

### 13. Übungsblatt – Statistische Physik

**Abgabe/Vorrechnen: Mi. 31.01.2018 im Tutorium (10:15 - 11:45 EW 226)**

**S Aufgabe 35 (4 Punkte): Paarkorrelationsfunktion und Strukturfaktor**

Für die Beschreibung kritischer Phänomene und der Struktur von Flüssigkeiten spielt die *Paarkorrelationsfunktion*

$$g(\mathbf{r}_{21}) = \frac{1}{\rho^2} \left\langle \sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_j) \right\rangle$$

eine wichtige Rolle. Sie ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen im Abstand  $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  anzutreffen, wenn sich ein willkürlich herausgegriffenes Referenzteilchen am Ort  $\mathbf{r}_1$  befindet. Zur Vereinfachung definiert man meist  $\mathbf{r} := \mathbf{r}_{21}$ . Im thermischen Gleichgewicht hängt  $g(\mathbf{r})$  eines homogenen Fluides aus sphärischen Teilchen nur vom Betrag  $r = |\mathbf{r}|$  ab. Die Fouriertransformierte von  $g(\mathbf{r}) - 1$  führt auf den *statischen Strukturfaktor*

$$S(\mathbf{k}) = 1 + \rho \int d^3r e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} (g(\mathbf{r}) - 1), \quad (6.43)$$

welcher in Streuexperimenten direkt messbar ist. Er bestimmt den differentiellen Wirkungsquerschnitt bei Streuung von z.B. Licht oder Neutronen an dem betrachteten System. Betrachten Sie ein verdünntes Hartekugel-Gas mit dem Wechselwirkungspotential

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} \infty & , \quad |\mathbf{r}| < R \\ 0 & , \quad |\mathbf{r}| > R \end{cases} ,$$

und zeigen Sie, dass der statische Strukturfaktor durch

$$S(\mathbf{k}) = 1 + \frac{4\pi R\rho}{k^2} \cos(kR) - \frac{4\pi\rho}{k^3} \sin(kR)$$

gegeben ist.

**Hinweis:** Für verdünnte Gase kann die radiale Verteilungsfunktion durch  $g(r) \approx e^{-\beta V(\mathbf{r})}$  genähert werden.

**M Aufgabe 36: Strukturfaktor und thermodynamische Größen**

- (a) Berechnen Sie für das verdünnte Hartekugel-Gas aus Aufgabe 35 die isotherme Kompressibilität:

$$\chi_T = \frac{\beta}{\rho} \lim_{\mathbf{k} \rightarrow 0} S(\mathbf{k}). \quad (6.53)$$

- (b) Berechnen Sie mit  $\chi_T$  die thermische Zustandsgleichung. Entwickeln Sie den Druck nach der Dichte und vergleichen Sie  $B_2$  und  $B_3$  mit den Resultaten aus Aufgabe 32.

**S Aufgabe 37 (6 Punkte): Paarkorrelationsfunktion eines Elektronengases**

Der Strukturfaktor von Elektronen in einem Metall kann näherungsweise durch

$$S(\mathbf{k}) = \begin{cases} \frac{3}{2} \hat{k} (1 - \frac{1}{3} \hat{k}^2) & , \quad \hat{k} \leq 1 \\ 1 & , \quad \hat{k} > 1 \end{cases} ,$$

beschrieben werden. Darin bezeichnet  $\hat{k} \equiv |\mathbf{k}|l$  eine dimensionslose Wellenzahl, und  $l$  eine durch die Elektronendichte  $n$  (und den Spin  $s$ ) charakterisierte Längeneinheit,  $\rho l^3 = (2s + 1)/(48\pi^2)$ .

13. Übung SP WS17

- (a) Skizzieren Sie  $S(\mathbf{k})$  als Funktion von  $\hat{k}$ .
- (b) Berechnen Sie die Paarkorrelationsfunktion  $g(\mathbf{r})$  des Elektronengases.
- (c) Wie lautet  $g(\mathbf{r} = \mathbf{0})$ ? Diskutieren Sie  $g(\mathbf{r})$  für sehr kleine Abstände,  $r \ll l$ . Welche physikalische Ursache haben die beobachteten Abweichungen vom Verhalten eines klassischen idealen Gases?
- (d) Skizzieren Sie  $g(\mathbf{r})$  als Funktion von  $\hat{r} = |\mathbf{r}|/l$  für Spin  $s = 1/2$ .

**Zum Übungsbetrieb:**

Die Übungsaufgaben teilen sich auf in mündliche **M** und schriftliche **S** Aufgaben. Die Kriterien für die Vergabe eines Übungsscheins gliedert sich daher in zwei Teile:

- Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
- Vorrechnen: Jeder Student kreuzt vor jeder Übung diejenigen Aufgaben auf einer ausliegenden Liste an, die er oder sie bearbeitet hat. Wer eine Aufgabe angekreuzt hat, ist bereit diese Aufgabe an der Tafel vorzurechnen. Für den mündlichen Teil des Scheinkriteriums müssen am Ende des Semesters in Summe 50% der mündlichen Aufgaben angekreuzt sein.